فهرس الإرسال الأول

مفاهيم عامة

الهدف من الدرس :

مراجعة بعض المبادئ في المنطق والعلاقات والعمليات الداخلية الواردة في برنامج السنتين الأولى والثانية ثانوي.

المدة اللازمة لدراسة : 12 ساعة.

الدروس التي ينبغي الرجوع إليها :

1 – المنطق الرياضي.

2 – المجموعات والعمليات عليها.

3 – حل المعادلات وجمل المعادلات في مجموعات مختلفة

المراجع الخاصة بهذا الدرس :

كتاب الرياضيات 3 ث/ع + ر المعهد التربوي الوطني

تصميم الدرس

تمهيد :

إذا كانت س فاصلة النقطة ب وَ ع ترتيب النقطة ب فإننا نرمز إلى إحداثيي هذه النقطة (س ، ع) ونقول أن الزوج (س ، ع) يمثل النقطة ب في المستوي حيث نسمي س الإحداثي الأول وَ ع الإحداثي الثاني. إن للزوج (س ، ع) مفهوم يختلف عن مفهوم كل من س وَ ع وأن هذا المفهوم يختلف تبعا للترتيب الذي نعطيه للعددين س، ع فالنقطة التي يمثلها الزوج (س ، ع) تختلف بصورة عامة عن النقطة التي يمثلها الزوج (ع ، س)

تعريف:

إن الزوج المرتب (س ، ع) هو كائن رياضي مؤلف من عنصرين س، ع مأخوذين بهذا الترتيب. نسمي س المركبة الأولى للزوج المرتب، كما نسمي المركبة الثانية لهذا الزوج المرتب.

* إذا كان ∂ ≠ ب فإن (∂ ، ب) ≠ (ب، ∂).
* (∂ ، ب) = (حـ ، د) ⟺ ∂ = حـ وَ ب = د.
* (∂ ، ب) ≠ (حـ، د) ⟺ ∂ ≠ جـ أو ب ≠ د.

مثال :

$(\sqrt{3},1)$ = (س ، ع) ⟺ س = $\sqrt{3}$ وَ ع = 1

الجداء الديكارتي :

الجداء الديكارتي لمجموعتين :

لتكن المجموعتان **س** ، **ع** حيث **س** ={ 1 ، 4 ، 7 } ، **ع** = { 0 ، 3 } . إذا شكّلنا جميع الأزواج المرتبة التي تنتمي المركبة الأولى لكل منها إلى المجموعة الأولى **س** وتنتمي المركبة الثانية لكل منها إلى المجموعة الثانية **ع** نحصل على المجموعة { (1 ، 0) ، (1 ، 3)، (4 ،0)، (4 ، 3) ، (7 ، 0)، (7 ، 3) }.

تعريف :

الجداء الديكارتي لمجموعتين **س** ، **ع** ويرمز له : **س** × **ع** هو مجموعة الأزواج المرتبة التي تنتمي المركبة الأولى لكل منها إلى المجموعة **س** وتنتمي المركبة الثانية لكل منها إلى المجموعة **ع**.

أي س × ع = { (∂ ، ب) / ∂ ∈ س وَ ب ∈ ع }

تمثيل الجداء الديكارتي :

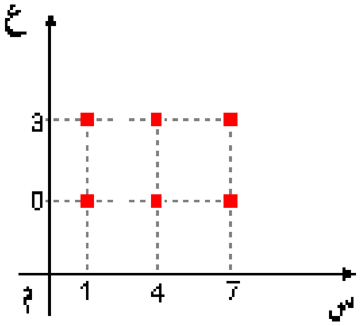
- **التمثيل الجدولي :** يُمثل الجداء الديكارتي **س × ع** بجدول ذي مدخلين كما هو مبيّن في الشكل :

ع \ س	1	4	7
0	(1 ، 0)	(4 ، 0)	(7 ، 0)
3	(1 ، 3)	(4 ، 3)	(7 ، 3)

- **التمثيل البياني :**

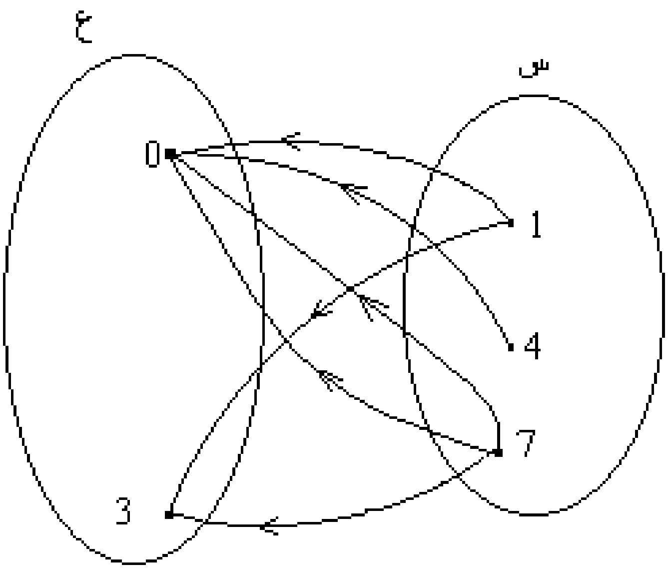
يُمثل الجداء الديكارتي في هذا النوع من التمثيل بمجموعة نقط من المستوي كما هو مبيّن في الشكل .

فالنقطة التي تمثل الزوج المرتب (س ، ع) هي نقطة تقاطع الخط العمودي الذي ينطلق من س والخط الأفقي الذي ينطلق من ع.



- **التمثيل السَّهمي :**

في هذا النوع من التمثيل تُمثل المجموعتان **س** وَ **ع** بمخططيهما لفين كما هو مبيّن في الشكل، ويُمثل كل زوج مرتب (س ، ع) من (**س** × **ع**) بسهم ينطلق من **س** ويصل إلى **ع**



خواص الجداء الديكارتي :

• إذا كانت المجموعتان **س** وَ **ع** غير خاليتين فإن :

س × **ع** ≠ **ع** × **س** ⟺ **س** ≠ **ع** وَ **س** × **ع** = **ع** × **س** ⟺ **س** = **ع**

• إذا كان عدد عناصر **س** هو ن وعدد عناصر المجموعة **ع** هو نَ فإن عدد عناصر المجموعة **س**× **ع** هو ن × نَ

• الجداء الديكارتي للمجموعات **س** ، **ع** ، **ص** بهذا الترتيب هو المجموعة التي نرمز إليها بالرمز **س** × **ع** × **ص** و المعرفة كما يلي :

س × **ع** × **ص** = { (∂ ، ب ، جـ) / ∂ ∋ **س** وَ ب ∋ **ع** وَ جـ ∋ **ص** }

1 - العلاقات :

1 – 1 العلاقة الثنائية :

1 – 1 – 1 مثال :

لتكن المجموعتان **س** = { 2 ، 3 ، 4 ، 5 } وَ **ص** = { 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 11 } و لنأخذ كل الأزواج المرتبة (س ، ع) من **س**× **ص** التي يكون من أجلها "س يُقسّم ع " نلاحظ أن الأزواج التي تحقق هذا الشرط هي عناصر المجموعة التالية :

{ (2 ، 6) ، (2 ، 8) ، (3 ، 6) ، (3 ، 9) (4 ، 8) }

نقول عن العبارة : "... يُقسم ... " أنها تعرّف علاقة ثنائية من المجموعة **س** نحو المجموعة **ص** ونسمي **س** مجموعة البدء وَ **ص** مجموعة الوصول.

1 - 2 : تعريف :

تكون علاقة ثنائية " معرفة " إذا أعطيت مجموعتان **س** وَ **ص** و خاصية (أو عبارة) تحققها أزواج مرتبة من **س** × **ص**. يرمز عادة إلى علاقة ثنائية ما بحرف مثل © .
وإذا كان الزوج المرتب (س ، ع) يحقق العلاقة © نكتب : س © ص.

1 – 3 - بيان العلاقة :

هو مجموعة الأزواج (س، ع) التي تحقق العلاقة © ونرمز له بالرمز : **ب**© .

1 – 3 – 1 مثال :

لتكن المجموعتان **س** = { 1 ، 2 ، 3 } ، **ص** = { – 2 ، 0 ، 3 ، 4 } والعلاقة © من **س** نحو **ص** المعرفة كما يلي :

(∀ س ∍ س) وَ(∀ ع ∍ **ص**) : س © ع ⇔ س < ع.
لدينا : 1 © 3 ، 1 © 4 ، 2 © 3 ، 2 © 4 ، 3 © 4.
بيان العلاقة © هو :

ب© = { (1 ، 3) ، (1 ، 4) ، (2 ، 3)، (2 ، 4) ، (3 ، 4)}

1 – 3 – 2 : مثال :

لتكن العلاقة © المعرفة من ℵ نحو ℑ كما يلي :
∀ س ∍ ℵ، ∀ ع ∍ ℑ ، س © ع ⇔ س = 2 ع.

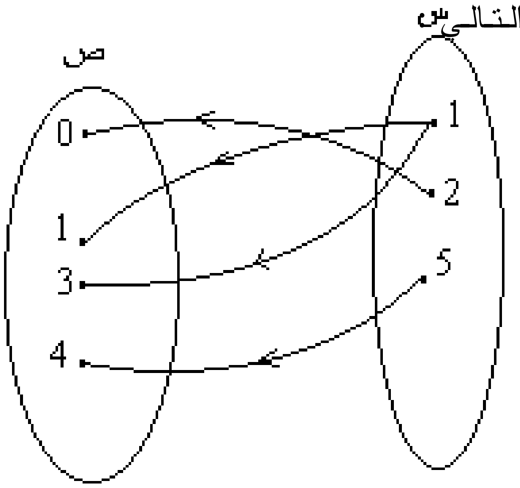
ب © = { (س ، ع) / س = 2 ع وَ س ∍ ℵ و ع ∍ ℑ }
= { (2 ع ، ع) / ع ∍ ℵ }

1 – 4 – تمثيل العلاقة الثنائية :

لتكن © علاقة معرفة من **س** = { 1 ، 2 ، 5 }

نحو **ص** = {0 ، 1 ، 3 ، 4 } وبيانها **ب** © = {(1 ،1)،(1 ، 3)،(2 ،0)،(5 ، 4) }

تمثل سهميا هذه العلاقة كما في الشكل التالي:



1 – 5 : العلاقة العكسية :

© علاقة ثنائية من **س** نحو **ص**. العلاقة العكسية للعلاقة الثنائية © هي العلاقة الثنائية $©^{-1}$ من **ص** نحو **س** والمعرفة كما يلي : ∂ © ب ⇔ ب $©^{-1}$ ∂

1 – 5 – 1 مثال :

لتكن المجموعتان **س** = { 1 ، 2 ، 5 } وَ **ص** ={ 1 ، 4 ، 6 } ولنعرف العلاقة © من **س** نحو **ص** كما يلي :
∀ س ∍ **س**، ∀ ع ∍ **ص** : س © ع ⇔ س ≥ ع . إذن :

ب$_{©}$ = { (1 ، 1) ، (1 ، 4) ، (1 ، 6) ، (2 ، 4) ، (2 ،6) ، (5 ، 6) }

والـعـلاقـة الـعـكـسـيـة $©^{-1}$ هـي عـلاقـة مـعـرفـة مـن **ص** نـحـو **س** بـيـانـهـا هـو :

ب$_{©^{-1}}$ = { (1، 1) ،(4 ، 1) ، (6 ، 1) ، (4 ، 2) (6 ، 2) ، (6 ، 5) }.

1 – 6 : الـعـلاقـة فـي مـجـمـوعـة واحـدة :

يـمـكـن تـعـريـف عـلاقـة ثـنـائـيـة © مـن الـمـجـمـوعـة **س** نـحـو الـمـجـمـوعـة **س** نـفـسـهـا نـقـول فـي هـذه الـحـالـة أنـنـا عـرفـنـا عـلاقـة فـي الـمـجـمـوعـة بـيـانـهـا هـو مـجـمـوعـة جـزئـيـة مـن الـمـجـمـوعـة : **س** × **س**.

(نـرمـز لـلـمـجموعة **س**× **س** بـالـرمـز **س**^{2} ونـدعـوهـا الـمـربـع الـديـكـارتـي لـلـمـجـمـوعـة **س**)

1 – 6 – 1 مـثـال :

© عـلاقـة ثـنـائـيـة مـعـرفـة فـي **س** = { 3 ، 5 ، 12 ، 27 } كـمـا يـلـي :

$\forall$ (س ، ع) $\in$ س^2: $\exists$ ك $\in \aleph$: س=ك ع.

ب$_{©}$ = { (3 ، 3) ، (12 ، 3) ، (27 ، 3) ، (5 ، 5) ،(12 ،12) ، (27 ،27) }

1 – 7 خـواص الـعـلاقـة فـي مـجـمـوعـة :

تـتـمـيـز الـعـلاقـة فـي مـجـمـوعـة بـخـواص لا تـتـمـتـع بـهـا الـعـلاقـة بين عـنـاصـر مـجـمـوعـتـين مـخـتـلـفـتـين وهـي :

1 – 7 –1 – خـاصـيـة الإنـعـكـاس :

لـتـكـن **س** مـجـمـوعـة غـيـر خـالـيـة، نـقـول عـن الـعـلاقـة © الـمـعـرفـة فـي **س** أنـهـا إنـعـكـاسـيـة إذا وفـقـط إذا كـان :

$\forall$ أ$\in$ س : أ © أ

1 – 7 – 1 – 1 : مـثـال :

عـلاقـة " .... يـقـسـم.......... " فـي الـمـجـمـوعـة $\aleph$* إنـعـكـاسـيـة لأنـه : $\forall$ أ$\in \aleph$* : س يـقـسـم س.

1 – 7 – 1 – 2 – مـثـال :

الـعـلاقـة © الـمـعـرفـة فـي $\aleph$ كـمـا يـلـي :

$\forall$(س ، ع)$\in \aleph^2$: س © ع $\Leftrightarrow$ س = 2 ع لـيـسـت انـعـكـاسـيـة لأن :

$\exists$ س$\in \aleph$* س ≠ 2 س .

1 – 7 – 2 – خـاصـيـة الـتـنـاظـر :

لتكن **س** مجموعة غير خالية، نقول عن علاقة © معرفة في **س** أنها تناظرية إذا وفقط إذا كان :

$\forall$(أ ، ب)$\in$ س^2: أ © ب$\Leftarrow$ب© أ.

1 – 7 – 2 – 1 : مثال :

علاقة التوازي المعرفة في مجموعة مستقيمات مستو تناظرية لأن : إذا كان (ق$_1$) ،(ق$_2$)مستقيمين من هذه المجموعة وكان (ق$_1$) //(ق$_2$) فإن (ق$_2$) //(ق$_1$) .

1 – 7 – 2 – 2 : مثال :

في المجموعة$\aleph$ العلاقة © المعرفة كما يلي:

$\forall$(س ، ع)$\in\aleph^2$: س © ع $\Leftrightarrow$ س = 2 ع ليست تناظرية.

1 – 7 – 3 : خاصية ضد التناظر :

نقول عن علاقة © معرفة في مجموعة **س** أنها ضد تناظرية إذا وفقط إذا كان :

$\forall$(أ ، ب)$\in$ س^2:(أ © ب) وَ (ب© أ)$\Leftarrow$أ=ب

1 – 7 – 3 – 1 مثال :

إن علاقة الاحتواء ($\subseteq$) علاقة ضد تناظرية في مجموعة أجزاء مجموعة إذ أنه : إذا كان
(س$\subseteq$ص وَ ص $\subseteq$ س) فإن **س = ص.**

1 – 7 – 3 – 2 : مثال :

إن العلاقة "…. $\leq$ …." المعرفة في المجموعة$\aleph$ هي علاقة ضد تناظرية لأنه : إذا كان :
(س$\leq$ ص وَ ص $\leq$ س) فإن س = ص.

1 – 7 – 4 : خاصية التعدي :

نقول عن علاقة © في مجموعة **س** أنها متعدية إذا وفقط إذا كان :

$\forall$(أ$\in$س) ،($\forall$ب$\in$س)،($\forall$ جـ$\in$س): $\left\{\begin{array}{l}\text{أ© ب}\\ \text{وَ}\\ \text{ب© جـ}\end{array}\right.$ $\Leftarrow$أ© جـ

1 – 7 – 4 – 1 : مثال :

علاقة " ….. $\leq$ …. " المعرفة في مجموعة الأعداد الطبيعية متعدية لأن : س $\leq$ ع وَ ع $\leq$ ص $\Leftarrow$ س $\leq$ ص.

1 – 8 علاقة التكافؤ :

1 – 8 – 1 تعريف :

نقول عن علاقة © معرفة في مجموعة **س** غير خالية أنها علاقة تكافؤ إذا وفقط إذا كانت إنعكاسية وتناظرية ومتعدية.

1 – 8 – 2 مثال :

لتكن **ق** مجموعة مستقيمات المستوي وَ © علاقة معرفة في **ق** كما يلي :

$$\forall(\Delta_1)\in ق \text{ ، } \forall(\Delta_2)\in ق : (\Delta_1)\,©\,(\Delta_2) \Leftrightarrow (\Delta_1)=(\Delta_2) \text{ أو } (\Delta_1)\cap(\Delta_2)=\emptyset$$

أي (Δ_1) يوازي (Δ_2). برهن أن © هي علاقة تكافؤ.

الحل :

* خاصية الإنعكاس : $\forall\ (\Delta) \in$ **ق** ، $(\Delta) = (\Delta)$ أي $(\Delta) \,//\, (\Delta)$ إذن $(\Delta)\ ©\ (\Delta)$ أي © إنعكاسية.

* خاصية التناظر: $(\forall\ (\Delta_1) \in$ **ق** $)$ ، $(\forall\ (\Delta_2) \in$ **ق**$)$:

$$[(\Delta_2)\ ©\ (\Delta_1)] \Leftrightarrow [(\Delta_2)=(\Delta_1) \text{ أو } (\Delta_1)\cap(\Delta_2)=\emptyset]$$

$$\Rightarrow [(\Delta_2)=(\Delta_1) \text{ أو } (\Delta_2)\cap(\Delta_1)=\emptyset]$$

إذن : $(\Delta_2)\ ©\ (\Delta_1)$ و بتالي © تناظرية .

* خاصية التعدي : $(\forall\ (\Delta_1) \in$ **ق** $)$ ، $(\forall\ (\Delta_2) \in$ **ق** $)$، $(\forall\ (\Delta_3) \in$ **ق**$)$:

$$\left.\begin{array}{c}(\Delta_1)\,©\,(\Delta_2)\\ \text{وَ}\\ (\Delta_2)\,©\,(\Delta_1)\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}(\Delta_1)=(\Delta_2) \text{ أو } (\Delta_1)\cap(\Delta_2)=\emptyset\\ \text{وَ}\\ (\Delta_2)=(\Delta_3) \text{ أو } (\Delta_2)\cap(\Delta_3)=\emptyset\end{array}\right.$$

نميز أربع حالات هي :

* $((\Delta_2)=(\Delta_1)$ وَ $(\Delta_2) = (\Delta_1) \Rightarrow (\Delta_3)=(\Delta_3)$ إذن $(\Delta_1)\ ©\ (\Delta_3)$

* $((\Delta_2)=(\Delta_1)$ وَ $(\Delta_2)\cap(\Delta_3)=\emptyset \Rightarrow (\Delta_1)\cap(\Delta_3)=\emptyset$

إذن $(\Delta_1)\ ©\ (\Delta_3)$ لأن $(\Delta_2)=(\Delta_1)$ إذن $(\Delta_1)\ ©\ (\Delta_3)$

* $(\Delta_2)\cap(\Delta_1)=\emptyset$ وَ $(\Delta_2)=(\Delta_3) \Rightarrow (\Delta_3)\cap(\Delta_1)=\emptyset$

لأن $(\Delta_2)=(\Delta_3)$ أذن $(\Delta_3)\ ©\ (\Delta_1)$

* $(\Delta_1)\cap(\Delta_2)=\emptyset$ $(\Delta_2)\cap(\Delta_3)=\emptyset$ لنبرهن أن :

$(\Delta_1) = (\Delta_3)$ أو $(\Delta_1) \cap (\Delta_3) = \emptyset$

لدينـا : $(\Delta_1) \cap (\Delta_3) \neq \emptyset \Leftarrow E$ ن / ن $\ni (\Delta_1)$ وَ ن $\ni (\Delta_3)$

$\Leftarrow (\Delta_1) = (\Delta_3)$

(لأن : $(\Delta_1) // (\Delta_2)$ وَ $(\Delta_3) // (\Delta_2)$ و نـعلـم أنــه يوجـد مسـتقيم وحـيد يشـمل النـقطـة ن ويوازي المستقيم ((Δ_2))).

إذ ن : (Δ_3) © (Δ_1) وبـالـتالـي © متـعدية إذن © علاقـة تـكـافـؤ فـي **ق**

1 – 9 - أصنـاف التـكافـؤ :

1 . 9 . 1 تـعريف :

لـتكـن © عـلاقـة تـكـافـؤ فـي الـمـجمـوعـة **س** ولـيكـن∂ عـنـصـرًا كـيفـيا مـن **س**، نـسـمـي صـنـف تـكـافـؤ ∂ الـمـجمـوعـة الـجـزئـيـة مـن **س** التي تـتكـون من العـنـاصـر المـرتـبـطـة بـالـعـنـصـر∂ وفـق الـعلاقـة © ويـرمـز لهـا بـالـرمـز $\bar{\partial}$ يـسـمـى الـعـنـصـر∂ مـمـثـلاً لهذا الـصـنـف. $\bar{\partial}$ = { س $\ni$ **س** /∂ © س }

1 . 9 . 2 خـواص أصـنـاف الـتـكـافـؤ :

- كـل صـنـف تـكـافـؤ فـي مـجـمـوعـة غـيـر خـالـيـة لأنـهـا عـلـى الأقـل تـشـمـل مـمـثـل الـصـنـف.
- أصـنـاف الـتـكـافـؤ مـنـفـصـلـة مـثـنـى مـثـنـى.
- إتـحـاد أصـنـاف الـتـكـافـؤ هـو الـمـجـمـوعـة الـكـلـيـة **س**.

1 . 9 . 3 مـجـمـوعـة حـاصـل الـقـسـمـة :

لـتكـن © عـلاقـة تـكـافـؤ فـي مـجـمـوعـة **س** غـيـر خـالـيـة. نُـسـمـي مـجـمـوعـة أصـنـاف تـكـافـؤ الـعـلاقـة © مـجـمـوعـة حـاصـل قـسـمـة **س** وفـق © و نـرمـز لـهـا بـرمـز : **س/** ©.

1 – 10 عـلاقـة الـتـرتـيب :

1 . 10 . 1 تـعريـف :

نـقـول عـن عـلاقـة مـعـرفـة فـي مـجـمـوعـة غـيـر خـالـيـة **س** أنـهـا عـلاقـة تـرتـيب إذا وفـقـط إذا كـانـت : إنـعـكـاسـيـة وَ ضـد تـنـاظـريـة وَ مـتـعـديـة.

1 . 10 . 2 مـثـال :

إن الـعـلاقـة "....$\geq$ .... " الـمـعـرفـة فــي $\aleph$ هــي عـلاقــة تـرتـيـب لأنـهـا إنـعـكـاسـيـة وضـد تـنـاظـريـة ومـتـعـديـة .

بالإضافة إلى هذه الخواص تتمتع العلاقة "....≥ ...." بالخاصية التالية :

∀ (س ، ع) ∈ $\aleph^2$: س ≥ ع أو ع ≥ س.

تسمى هذه العلاقة التي تحقق هذا الشرط علاقة ترتيب كلي :

1 – 10 – 3 تعريف :

إذا كانت © علاقة ترتيب في المجموعة **س** فإنها تكون علاقة ترتيب كلي إذا تحقق الشرط التالي :

(∀ ∂ ∈ **س**) ، (∀ ب ∈ **س**) : ∂ © ب أو ب © ∂.

و في خلاف ذلك نقول أن الترتيب جزئيا.

1 . 10 . 3 . 1 مثال :

© علاقة معرفة في ℵ* كما يلي :

∀ ∂ ∈ ℵ* ، ∀ ب ∈ ℵ* : ∂ © ب ⇔ E ك ∈ ℵ* : ∂ = ك ب

برهن أن © علاقة ترتيب في ℵ*

الحل :

* خاصية الإنعكاس : (∀ ∂ ∈ ℵ*) : ∂ = 1 × ∂ أي ∂ © ∂ و بالتالي © إنعكاسية

* خاصية ضد التناظر :

(∀ ∂ ∈ ℵ*) ، (∀ ب ∈ ℵ*) : ∂ © ب وَ ب © ∂ ⇐ ∂ = ب.

؟ © ب | | E ك ∈ ℵ* : ؟ = ك ب
وَ | ⇐ | وَ
ب © ؟ | | E كَ ∈ ℵ* : ب = كَ ؟

وبضرب المساواتين طرفا لطرف ينتج : (∂ ب) = ك كَ (∂ ب)

وبما أن ∂ ب ≠ 0 يكون ك كَ = 1 و بالتالي : ك = كَ = 1 و منه ∂ = ب إذن © علاقة ضد تناظرية .

* خاصية التعدي :

(∀ ∂ ∈ ℵ*) ، (∀ ب ∈ ℵ*) ، (∀ جـ ∈ ℵ*) :

ا © ب ⇐ E ك ∍ ℵ* : ا = ك ب (1)

وَ ⇐ وَ

ب © جـ ⇐ E كَ ∍ ℵ* : ب = كَ جـ (2)

و بضرب المساوتين (1) وَ (2) طرفًا لطرف ينتج : ∂ ب = ك كَ ب جـ و منه ∂ = ك كَ جـ (لأن ب ≠ 0)أ ي ∂ © جـ. إذن © متعدية و منه © علاقة ترتيب ℵ*

1 – 11 – المجموعة المحدودة من الأعلى :

1 . 11 . 1 : تعريف :

لتكن **س** مجموعة غير خالية مزودة بعلاقة ترتيب (≥) ولتكن **ص** مجموعة جزئية من **س**. نقول عن العنصر∂ من **س** أنه حادٌّ من الأعلى للمجموعة **ص** إذا كان :∀ ب ∍ **ص** : ب≥ ∂ وعندئذ نقول أن المجموعة **ص** محدودة من الأعلى.

1 . 11 . 1 . 1 مثال :

لتكن المجموعة **س** = { 0 ، 1 ، 4 ، 5 ، 7 ، 9 ، 10 ، 12 } المزودة بالعلاقة ≥ ولتكن مجموعتها الجزئية ص = { 0 ، 1 ، 4 ، 9 }

نلاحظ أن : 9 حاد من الأعلى لِـ : **ص**

10 حاد من الأعلى لِـ **ص** ، 12 حاد من الأعلى لِـ **ص**

نلاحظ أن 9 أكبر عنصر في **ص**.

ملاحظة :

المجموعة التي تقبل عنصرًا أكبراً تكون محدودة من الأعلى. العكس غير صحيح لأنه يمكن أن تكون المجموعة محدودة من الأعلى دون أن تقبل عنصراً أكبراً.

1.- 12 المجموعة المحدودة من الأسفل :

1 . 12 . 1 تعريف :

لتكن المجموعة **س** غير الخالية والمزودة بعلاقة ترتيب (≥) ولتكن **ص** مجموعة جزئية من **س**. نقول عن العنصر∂ من **س** أنه حاد من الأسفل للمجموعة **ص** إذا كان : ∀ ب ∍ **ص** : ∂ ≥ ب. عندئذ نقول أن المجموعة **ص** محدودة من الأسفل.

1 . 12 . 2 مثال :

لتكن المجموعة : **س** = { 2 ، 4 ، 5 ، 7 ، 8 ، 9 ، 11، 13 } المزودة بالعلاقة ≥ ولتكن مجموعتها الجزئية **ص** = { 5 ، 7 ، 8 ، 9 ، 11 }

نلاحظ أن : 2 حاد من الأسفل لِـ **ص**، 5 حاد من الأسفل لِـ **ص**

4 حاد من الأسفل لِـ **ص**، 5 هو أصغر عنصر من **ص**.

2 - الدوال والتطبيقات :

درسنا سابقا العلاقات وسنهتم فيما يلي بنوع خاص من العلاقات يدعى التطبيقات.

2 - 1 الدوال :

2 - 1 - 1 تعريف :

نسمي دالة من المجموعة **س** في المجموعة **ع** كل علاقة من **س** نحو **ع** ترفق بكل عنصر من **س** عنصرًا على الأكثر من ع .

نرمز إلى الدالة بأحد الرموز : تا ، ها ، لا، ....

و نكتب تا : **س** ← ع

س ↤ تا (س)

ملاحظة : الدالة هي تا بينما تا (س) هو صورة العنصر س بالدالة تا.

2 . 1 . 2 مجموعة تعريف الدالة :

مجموعة تعريف الدالة تا هي مجموعة عناصر المجموعة **س** التي لها صورة في ع بالدالة تا.

مثال :

تا دالة من ℜ في ℜ حيث $تا(س) = \frac{س - 6}{س^2 - 25}$

تكون تا معرفة إذا كان : $س^2 - 25 \neq 0$ أي س≠ 5 وَ س ≠ - 5.

نرمز لمجموعة التعريف بالرمز ف ونكتب :

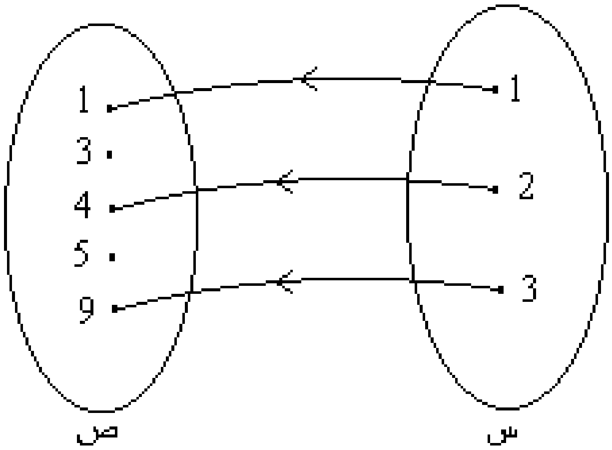
ف = ℜ - { 5 ، - 5 } =] - ∞ ، - 5 [∪] - 5 ، 5 [∪] 5 ، +∞ [

2 . 2 : التطبيقات :

2 . 2 . 1 مثال :

إذا كانت **س** = { 1 ، 2 ، 3 } ، **ص** = { 1 ، 3 ، 4 ، 5 ، 9 } والعلاقة© المعرفة كما يلي : ∀ س ∈ **س** ، ∀ ع ∈ **ص** : س © ع ⟺ س^2 = ع.

يبيّن هذا الشكل المخطط السهمي للعلاقة© .



2 . 2 . 2 تعريف :

نقول عن علاقة © من مجموعة **س** نحو مجموعة **ص** أنها تطبيق للمجموعة **س** في المجموعة **ص** إذا وفقط إذا أرفقت بكل عنصر من **س** عنصرًا وحيدًا من **ص**، ويُرمز للتطبيق بأحد الرموز تا ، ها ، لا . . .

2 . 2 . 3 مثال :

لتكن الدالة تا من $\Re$ في $\Re$ المعرفة كما يلي: $\text{تا}(\text{س})=\frac{2\text{س}+1}{\text{س}-5}$

هل تا تطبيق ؟

الحل :

نلاحظ أن العنصر 5 ليس له صورة بواسطة تا وبالتالي فإن تا ليست تطبيقًا من $\Re$ في $\Re$. و لكن نلاحظ أن تا تطبيق من $\Re$ –{ 5 } نحو $\Re$

ملاحظة :

التطبيق هو دالة معرفة في مجموعة تعريفها.

2 . 3 أنواع التطبيقات :

ليكن تا تطبيق من المجموعة **س** نحو المجموعة **ع**

2 . 3 . 1 التطبيق المطابق :

التطبيق المطابق في المجموعة **س** هو التطبيق للمجموعة **س** في نفسها الذي يرفق بكل عنصر س من **س** العنصر س نفسه ونرمز له بالرمز $I_{\text{س}}$ / ∀ س ∈ **س** : $I_{\text{س}}$ (س) = س

* **خاصية :**

تا تطبيق للمجموعة **س** في المجموعة **ع**

$\forall$ س $\ni$ **س** : (تا$\mathbf{O}I_{س}$) (س) = تا [$I_{س}$ (س)] = تا (س)

إذن : تا o $I_{س}$= تا ، $I_{س}$ oتا = تا.

2 – 3 – 2 التطبيق الغامر :

نقول عن تطبيق تا للمجموعة **س** في المجموعة **ع** أنه تطبيق غامر إذا وفقط إذا كانت لكل عنصر من المجموعة **ع** سابقة على الأقل في **س**.

أي : (تا غامر) $\Leftrightarrow$ ($\forall$ ع $\ni$ **ع** ، E س $\ni$ **س** : تا (س) = ع).

ملاحظة :

يكون تا تطبيقًا غير غامر إذا وجد على الأقل عنصر من **ع** ليس له سابقة في **س** أي :

(E ع $\ni$ **ع** ، $\forall$ س $\ni$ **س** : ع $\neq$ تا(س).

2 – 3 – 2 – 1 مثال : ليكن التطبيق تا المعرف كما يلي :

تا : $\Re - \{1\} \leftarrow \Re$

س ← تا (س) = $\dfrac{2س-5}{س-1}$. هل تا غامر ؟

الحل :

(تا غامر) $\Leftrightarrow$ ($\forall$ ع $\ni$ $\Re$ ، E س $\ni$ $\Re$ - $\{-1\}$: / تا (س) = ع).

ليكن ع عنصرًا من $\Re$

ع = تا (س) $\Leftrightarrow$ ع = $\dfrac{2س-5}{س-1}$ $\Leftrightarrow$ ع (س – 1) = 2 س – 5.

$\Leftrightarrow$ ع س – ع = 2 س – 5.

$\Leftrightarrow$ ع س - 2 س = ع - 5

$\Leftrightarrow$ س (ع – 2) = ع – 5 .

*من أجل ع $\neq$ 2 فإن س (ع – 2) = ع – 5 $\Leftrightarrow$ س = $\dfrac{ع-5}{ع-2}$

*من أجل ع = 2 لا يمكن تعيين س . أي العنصر 2 ليست له سابقة بالتطبيق تا إذن تا ليس غامرًا.

2 - 3 - 3 : التطبيق المتباين :

نقول عن التطبيق تا للمجموعة **س** في المجموعة **ع** أنه متباين إذا وفقط إذا كانت لكل عنصر من **ع** سابقة على الأكثر في **س** بالتطبيق تا.

أي : (تا متباين) $\Leftrightarrow [\forall$(س$_1$، س$_2$)$\in$ **س**^{2} : تا(س$_1$) = تا(س$_2$) $\Leftarrow$ س$_1$= س$_2$].

يمكن أن نعطي صيغة أخرى للتعريف و هي :

(تا متباين) $\Leftrightarrow [\forall$(س$_1$، س$_2$)$\in$ **س**^{2} $\Leftarrow$ س$_1 \neq$ س$_2$ تا (س$_1$) $\neq$ تا (س$_2$)].

نتيجة : يكون تا متبايناً إذا كان للمعادلة ع = تا(س) حل في المجموعة **س** على الأكثر و ذلك من أجل كل عنصر ع من **ع**.

* متى نقول عن تطبيق تا من **س** نحو **ع** أنه غير متباين ؟

يكون تطبيقا غير متباين إذا وجد عنصران متمايزان من **س** لهما نفس الصورة في **ع**.

2 – 3 – 3 – 1 مثال :

ليكن تا التطبيق المعرف كما يلي :

تا : $\Re$ -{ 1 } $\leftarrow \Re$

س ← تا (س) = $\dfrac{2\text{س} - 5}{\text{س} - 1}$. هل تا متباين ؟

الحل :

(تا متباين) $\Leftrightarrow$ ($\forall$(س$_1$، س$_2$)$\in$($\Re$-{1})^2: تا(س$_1$)= تا(س$_2$)$\Leftarrow$س$_1$= س$_2$)

مهما يكن س$_1$ و س$_2$ من $\Re$ -{ 1 } لدينا :

تا (س$_1$) = تا (س$_2$) $\Leftarrow$ $\dfrac{2\text{س}_1-5}{\text{س}_1-1} = \dfrac{2\text{س}_2-5}{\text{س}_2-1}$.

$\Leftarrow$ (2 س$_1$–5) (س$_2$–1) = (2س$_2$–5)(س$_1$–1)

$\Leftarrow$2 س$_1$س$_2$–2س$_1$–5س$_2$+5 = 2س$_2$س$_1$–2س$_2$–5س$_1$+5

$\Leftarrow$ 3 س$_1$=3 س$_2$

$\Leftarrow$ س$_1$= س$_2$ إذن تا متباين.

2 – 3 – 4 التطبيق التقابلي :

نقول عن التطبيق تا للمجموعة **س** في المجموعة **ع** أنه تطبيق تقابلي إذا وفقط إذا كان لكل عنصر من **ع** سابقة وحيدة من **س** يكون تا تقابلاً إذا كان للمعادلة تا(س) = ع حلا وحيداً في **س** من أجل كل ع من **ع**.

نتيجة :

تا تقابلي إذا وفقط إذا كان تا متباينًا وغامرًا.

2 – 3 – 5 التطبيق العكسي لتقابل :

تا تطبيق تقابلي للمجموعة **س** في المجموعة **ع**. بما أن كل عنصر ع من **ع** له سابقة وحيدة س في **س** بالتطبيق تا فإن العلاقة العكسية للعلاقة تا ترفق بكل عنصر ع من **ع** عنصرًا وحيدًا س من **س** فهي إذن تطبيق.

نسمي هذا التطبيق التطبيق العكسي للتقابل تا ونرمز له بالرمز تا $^{-1}$

إذن تا $^{-1}$ تطبيق للمجموعة **ع** في المجموعة **س**.

س ∋ **س** ، ع ∋ **ع** : ع = تا (س) ⇔ س= تا $^{-1}$ (ع).

نتائج :

* التطبيق العكسي لتقابل هو تقابل.
* تا $^{-1}$ o تا = $I_{\text{س}}$.
* تا o تا $^{-1}$ = $I_{\text{ع}}$.

2 – 3 – 6 التطبيق المركب :

لنعتبر ثلاث مجموعات ليست خالية **س** ، **ع** ، **ص** وليكن التطبيق تا للمجموعة **س** في المجموعة **ع**، التطبيق ها للمجموعة **ع** في المجموعة **ص**.

تا :**س** ← **ع** وَ ها : **ع** ← **ص**.

ليكن س عنصرًا من **س** وَ ع صورة س بالتطبيق تا . إذن ع = تا (س).

ع عنصر من **ع** . لتكن ص صورة ع بالتطبيق ها.

إذن ص = ها (ع) = ها [تا (س)].

فإذا أرفقنا بكل عنصر س من **س** العنصر ص من **ص** حسب ما ورد سابقا نكون قد عرّفنا تطبيقا جديدًا للمجموعة **س** في المجموعة **ص**.

2 – 3 – 6 – 1 تعريف :

يسمى التطبيق السابق عا مركب التطبيقين تا وَ ها بهذا الترتيب ونكتب عا = هاo تا ونقرأ : "عا يساوي تا تركيب ها " .

∀ س ∋ **س** ، عا (س) = (هاo تا) (س) = ها [تا (س)]

2 – 3 – 7 : تركيب تطبيقين متباينين :

2 – 3 – 7 نظرية :

لتكن **س** ، **ع** ، **ص** ثلاث مجموعات وليكن تا تباينا للمجموعة **س** في المجموعة **ع** وليكن ها تباينا للمجموعة **ع** في المجموعة **ص**.
التطبيق المركب هاo تا هو تباين للمجموعة **س** في المجموعة **ص**.

البرهان : ليكن س$_1$ و س$_2$ عنصرين من **س** ، ع$_1$ وَ ع$_2$ صورتيهما على الترتيب و فق تا، ص$_1$ وَ ص$_2$ صورتي ع$_1$ وَ ع$_2$ على الترتيب وفق ها لدينا :

$$س_1 \xrightarrow{تا} ع_1 ،\ ع_1 \xrightarrow{ها} ص_1 ،\ س_2 \xrightarrow{تا} ع_2 ،\ ع_2 \xrightarrow{ها} ص_2$$

التطبيق المركب هاo تا هو الذي يرفق بالعنصرين س$_1$ وَ س$_2$ على التوالي ص$_1$ وَ ص$_2$.

$$س_1 \xrightarrow{هاo\ تا} ص_1 ،\ س_2 \xrightarrow{هاo\ تا} ص_2 .$$

لدينا $(ص_1 = ص_2) \Leftrightarrow$ ها$(ع_1)$ = ها . $(ع_2)$

التطبيق ها متباين إذن : ها $(ع_1)$ = ها $(ع_2)$ $\Leftarrow$ $ع_1 = ع_2$

لدينا $(ع_1 = ع_2) \Leftrightarrow$ تا$(س_1)$ = تا$(س_2)$

والتطبيق تا متباين إذن : تا$(س_1)$ = تا$(س_2)$ $\Leftarrow$ $س_1 = س_2$

ينتج مما سبق أن (هاo تا) $(س_1)$ = (هاo تا) $(س_2)$ $\Leftarrow$ $س_1 = س_2$

إذن التطبيق هاo تا هو تباين للمجموعة **س** في المجموعة **ص**.

2 – 3 – 8 تركيب تطبيقين غامرين :

نظرية :

لتكن المجموعات **س** ، **ع** ، **ص** والتطبيق الغامر تا للمجموعة **س** في المجموعة **ع** والتطبيق الغامر ها للمجموعة **ع** في المجموعة **ص**. التطبيق هاo تا هو تطبيق غامر للمجموعة **س** في المجموعة **ص**.

البرهان :

يجب أن نبرهن أنه من أجل كل عنصر ص من **ص**، يوجد على الأقل عنصر س من **س** بحيث يكون ك (هاo تا) (س) = ص.

لنعتبر عنصرًا ص من **ص**، التطبيق ها غامر فرضا، إذن يوجد على الأقل عنصر ع من **ع** بحيث يكون ها (ع) = ص.

التطبيق تا غامر، إذن يوجد على الأقل عنصر س من **س** بحيث يكون تا (س) = ع .

لدينـا إذن (ها o تا) (س) = ص.

فالـتطـبـيـق هاo تا تطبيق غامر لـلمجـمـوعـة **س** في الـمجـمـوعة **ص**.

2 – 4 - إقـتـصـار وإمـتـداد تـطـبـيق :

2 – 4 – 1 إقـتـصـار تـطـبـيق :

تـا تـطـبـيـق لـلـمـجـمـوعـة **س** في الـمـجـمـوعـة **ع** ، **سَ** مـجـمـوعـة جـزئـيـة من الـمـجـمـوعـة **س** نـسـمـي إقـتـصـار الـتطـبـيق تـا عـلـى الـمـجـمـوعـة **سَ** الـتـطـبـيق $تا_1$ الـمـعـرف من **سَ** فـي **ع** كـمـا يـلـي :

$$\forall \text{ س} \ni \textbf{سَ} : تا_1 (س) = تـا (س).$$

2 – 4 – 1 – 1 مـثـال :

$$تـا : \Re \leftarrow \Re : تـا (س) = 2 س.$$

$$تـا : \aleph \leftarrow \Re : تا_1 (س) = 2 س$$

$تا_1$: هـو إقـتـصـار الـتـطـبـيـق تـا عـلى الـمـجـمـوعـة$\aleph$.

2 – 4 – 2 - إمـتـداد تـطـبـيق :

تـا تـطـبـيـق لـلـمـجـمـوعـة **س** فـي الـمـجـمـوعـة **ع**.

ص مـجـمـوعـة تـحـوي **س** نـقـول عـن الـتـطـبـيـق $تا_2$ لـلـمـجـمـوعـة **ص** فـي **ع** أنـه إمـتـداد لـلـتـطـبـيق تـا إذا وفـقط إذا كـان إقـتـصـار $تا_2$ عـلـى **س** هـو الـتـطـبـيق تـا أي :

$$\forall \text{ س} \ni \textbf{س} : تا_2 (س) = تـا (س).$$

2 – 4 – 2 – 1 - مـثـال :

$$تا : \aleph \leftarrow \Re : تا(س) = س + 1.$$

$$تا_1 : \Im \leftarrow \Re : تا_1 (س) = س + 1$$

$$تا_2 : \Re \leftarrow \Re : تا_2 (س) = س + 1.$$

$تا_1$ وَ $تا_2$ إمـتـدادان لـلتطـبـيق تا إلـى $\Im$ وَ إلـى$\Re$ عـلـى الـتـرتـيـب.

3 - الـعـمـلـيـات الـداخـلـيـة

3 – 1 الـعـمـلـيـة الـداخـلـيـة :

3 – 1 – 1 – **تعريف :**

نسمي عملية داخلية في مجموعة مج كل تطبيق للمجموعة مج × مج في المجموعة مج.

أمثلة :

* الجمع والطرح والضرب عمليات داخلية في المجموعة$\mathfrak{R}$.

* الطرح عملية ليست داخلية في المجموعة$\aleph$.

لأنه يوجد على الأقل عددان طبيعيان س ، ع بحيث (س – ع) لا ينتمي إلى$\aleph$.

3 – 2 : خواص العمليات الداخلية :

3 – 2 – 1 – خاصية التبديل :

* عملية داخلية في المجموعة مج.

تكون العملية * تبديلية في المجموعة مج إذ وفقط إذ تحقق ما يلي :

$\forall$ (س ، ع) $\in$ مج^2 : س * ع = ع * س.

3 – 2 – 2 – خاصية التجميع :

*عملية داخلية في المجموعة مج

تكون العملية * تجميعية في مج إذ وفقط إذا تحقق ما يلي :

$\forall$ (س ، ع ، ص) $\in$ مج^3 : (س * ع) * ص = س * (ع * ص).

3 – 2 – 3 العنصر الحيادي :

*عملية داخلية في المجموعة مج

يكون العنصري من المجموعة مج عنصرًا حياديًا للعملية * إذ وفقط إذا تحقق ما يلي :

$\forall$ س $\in$ مج : س * ي = س وَ ي * س = س .

نظرية :

العنصر الحيادي إن وجد وحيد.

البرهان :

إذ فرضنا وجود عنصرين حياديين ي ، يَ للعملية * فإن

يَ * ي = ي * يَ = يَ (باعتبار ي عنصر حيادي).

يَ * ي = ي * يَ = ي (باعتبار يَ عنصر حيادي).

ينتج إذن : ي = يَ ، أي أن العنصر الحيادي وحيد.

3 – 2 – 4 نظير عنصر :

* عملية داخلية في المجموعة مج وتقبل عنصراً حياديًا ي. يكون العنصر سَ من مج نظيراً للعنصر س من مج بالنسبة للعملية * إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

س * سَ = ي وَ سَ * س = ي .(نقول عن س وَ سَ أنهما متناظران)

نظرية :

* عملية تجميعية في مجموعة مج.
نظير عنصر في مج إن وجد وحيد.

البرهان :

ليكن سَ وَ سً نظيرين للعنصر س لدينا

(سَ * س) * سً = ي * سً وَ سَ * (س*سً) = سَ * ي = سَ إذن سَ = سً.

3 – 2 – 5 العنصر الماص :

* عملية داخلية في المجموعة مج .

يكون العنصر ∂ من مج عنصرًا ماصًا بالنسبة للعملية * إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$\forall$س $\ni$ **مج** : س *∂ = ∂ وَ ∂ * س = ∂

3 – 2 – 5 – 1 : مثال :

الصفر عنصر ماص في المجموعة $\Re$ المزودة بعملية الضرب لأن :$\forall$ س $\ni$ $\Re$ ، س × 0 = 0 وَ 0 × س = 0

3 – 2 – 6 - العنصر الاعتيادي :

*عملية داخلية في المجموعة مج .

يكون العنصر ∂ من المجموعة مج إعتياديا بالنسبة إلى العملية * إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$\forall$(س، ع)$\ni$ **مج** ^{2} : (∂ *س =∂ *ع) $\Leftarrow$ (س =ع) و (س * ∂ =ع * ∂) $\Leftarrow$(س =ع)

3 – 2 – 7 - توزيع عملية على عملية أخرى :

لتكن * وَ Δ عمليتين داخليتين في مجموعة مج.

تكون العملية * توزيعية على العمليةΔ إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$$\forall \ (س، ع،ص) \in مج^3 : \begin{cases} س * (ع \ \Delta \ ص) = (س * ع) \ \Delta (س * ص) \\ وَ \\ (ع \ \Delta \ ص) \ * س = (ع * س) \ \Delta (ص * س) \end{cases}$$

3 – 3 – البنى الجبرية :

نفرض * عملية داخلية في المجموعة مج (مج $\neq \phi$).

3 – 3 – 1 الزمرة :

تكون (مج ، *) زمرة إذا وفقط إذا تحققت كل الشروط الآتية :

- العملية * تجميعية.
- العملية * تقبل عنصرًا حياديا.
- كل عنصر من مج يقبل نظيرًا في مج بالنسبة إلى العملية *.

إذا كانت العملية * تبديلية نقول أن الزمرة (مج ، *) تبديلية أو آبلية.

3 – 3 – 1 – 1 مثال :

($\mathfrak{I}$ ، +) زمرة تبديلية.

($\aleph$ ، +) ليست زمرة (لأنه ليس لكل عنصر نظير).

3 – 3 – 2 الحلقة :

* وَ Δ عمليتان داخليتان في المجموعة **ل**.

تكون (**ل** ، * ، Δ) حلقة إذا وفقط إذا تحققت كل الشروط الآتية.

- (**ل** ، *) زمرة تبديلية.
- العملية Δ تجميعية.
- العملية Δ توزيعية على العملية * .

إذا كانت Δ تبديلية نقول أن الحلقة (**ل**، * ، Δ) تبديلية.

إذا كانت Δ تقبل عنصرًا حياديًا نقول أن الحلقة (**ل** ، *،Δ) واحدية.

ملاحظة : يسمى العنصر الحيادي بالنسبة إلى العملية * (صفر الحلقة) في حين يسمى العنصر الحيادي بالنسبة للعمليةΔ عنصر الوحدة.

قواسم الصفر :

لتكن (مج ، + ، $\times$) حلقة. العنصر الحيادي بالنسبة لـِ + هو 0. نقول عن العنصرين∂ وَ ب من مج أنهما قاسمين للصفر إذا كان : ∂ × ب = 0 وَ $\partial \neq 0$ وَ ب $\neq$

.0

الحلقة التامة :

نقول عن الحلقة (مج، + ،×) أنها تامة إذ كانت لا تحتوي على قواسم للصفر.

3 – 3 – 4 الجسم :

ل مجموعة مزودة بعمليتين داخليتين * ،Δ . ليكن ي العنصر الحيادي للعملية *

وَ **لَ** = **ل** – { ي } تكون (**ل** ، * ، Δ) جسمًا إذا وفقط إذ تحقق ما يلي :

- (**ل** ، * ، Δ) حلقة واحدية.
- المجموعة **لَ** غير خالية ولكل عنصر من **لَ** عنصر نظير بالنسبة إلى العمليةΔ.

إذا كانت العمليةΔ تبديلية نقول أن الجسم (**ل** ، * ، Δ) تبديلي.

أو إنه حقل.

3 – 4 – التشاكل :

3 – 4 – 1 – تعريف :

لتكن مج مجموعة غير خالية مزودة بعملية داخلية * ولتكن **ل** مجموعة غير خالية مزودة بعملية داخليةT. وليكن تا تطبيق من مج نحو **ل**.

نقول أن التطبيق تا تشاكل إذا تحقق ما يلي :

$$\forall \ (س_1 ، س_2) \in مج^2 :\ تا(س_1 * س_2) = تا\ (س_1)\ \mathsf{T}\ تا\ (س_2)\ .$$

3 –4 – 1 – 1 مثال :

تا تطبيق معرف كما يلي :

تا : (ℵ ، +) ← (ℵ ، ×) : تا (س) = $2^{س}$

بين أن تا تشاكل .

الحل : يكون تا تشاكلا إذا كان :

$$\forall \ (س_1،س_2) \in ℵ^2 :\ تا(س_1+س_2) = تا\ (س_1) \times تا(س_2)$$

$$تا(س_1+س_2) = 2^{س_1+س_2} = 2^{س_1} \times 2^{س_2}$$

$تا(س_1+س_2) =$ تا $(س_1) \times$ تا $(س_2)$. إذن تا تشاكل

3 – 4 – 1 – 2 – مثال :

لتكـن (مــج ، o) زمـرة تـبـديـلـيـة، س عـنـصـر مــن مــج . نـرمـز لِـ سo س بـالـرّمـز $س^2$
وليكـن φ تطـبـيقا معرفـا كما يلي :

φ : مـج ⟵ مـج : φ (س) = $س^2$ بـرهـن أن φ تـشـاكـل .

الـحـل :

$$\forall \left(س_1 ، س_2\right) \in مج^2 : \varphi\left(س_1 \circ س_2\right) = \left(س_1 \circ س_2\right)^2$$

$$= \left(س_1 \circ س_2\right) \circ \left(س_1 \circ س_2\right)$$

$$= \left(س_1 \circ س_1\right) \circ \left(س_2 \circ س_2\right) = \varphi\left(س_1 \circ س_2\right)$$ (لأنo تبديلية وتجميـعية).

$$= س_1^2 \circ س_2^2 .$$

$$= \varphi \left(س_1\right) \circ \varphi\left(س_2\right)$$ إذن φ تـشــاكـل.

3 – 4 – 2 الـتـشـاكـل الـتـقـابـلـي :

مج$_1$ مـجمـوعـة مـزودة بـعمـلـيـة داخـلـيـة * وَ **مج**$_2$ مـجمـوعـة مـزودة بـعـمـلـيـة داخـلـيـة T .

تـا تـطبيـق من **مج**$_1$ نـحـو **مج**$_2$

نـقـول أن تـا تـشـاكـل تـقـابـلـي إذا كـان :

- تـا تـشــاكـلاً .
- تـا تـقـابـلاً.

3 – 4 – 2 – 1 مـثـال :

(مـج ، ×) زمـرة. ي عـنـصـر حـيـادي لـلـعـمـلـيـة× فـي مـج
∂عنصـر مـن مـج. وليكـن $\varphi_{م}$ تـطـبـيـقـا مـعـرفـا كـمـا يـلـي :

$$\varphi_{م} : مج \longrightarrow مج : \varphi_{م}(س) = م . س . م^{-1} . (م^{-1} \text{ نظير } \partial)$$

بـرهـن أن $\varphi_{م}$ تـشـاكـلا تـقـابـلـي .

الـحـل : • نـبـرهـن أن $\varphi_{م}$ تـشـاكـل.

$$\varphi_{م} \text{ تشاكل} \Leftrightarrow \forall\left(س_1 ، س_2\right) \in مج^2 : \varphi_{م}\left(س_1 \times س_2\right) = \varphi_{م}\left(س_1\right) \times \varphi_{م}\left(س_2\right)$$

$$\varphi_{م}\left(س_1 \times س_2\right) = م\left(س_1 \times س_2\right) م^{-1} = م\left(س_1\right) \left(م^{-1} \times م\right) \left(س_2\right) م^{-1}$$

$$= \left(م س_1 م^{-1}\right) \times \left(م س_2 م^{-1}\right)$$

$$= \varphi_{م}\left(س_1\right) \times \varphi_{م}\left(س_2\right)$$

إذن $\varphi_{م}$ تشـاكل.

• نبـرهن أن $\varphi_{م}$ تقـابل.

($\varphi_{م}$ تقـابل) $\Leftrightarrow$ ($\forall$ ع $\in$ مج ، E س $\in$ مج وَ س وحيـد : $\varphi_{م}$(س) = ع)

$\varphi_{م}$ (س) = ع $\Leftrightarrow$ ع = م . س . م$^{-1}$

$\Leftrightarrow$ م$^{-1}$ ع = م$^{-1}$. م . س . م$^{-1}$ $\Leftrightarrow$ م$^{-1}$ ع = س. م$^{-1}$

$\Leftrightarrow$ م$^{-1}$ ع . م = س. م$^{-1}$. م

$\Leftrightarrow$ م$^{-1}$. ع . م = س

$\Leftrightarrow$ س = م$^{-1}$. ع . م

ومنـه $\varphi_{م}$ تقـابل .

إذن $\varphi_{م}$ تشـاكل تقـابلـي من (مـج ،×) في (مـج ،×).

3 – 4 – 2 – 2 نظـريـة :

مـج مجـموعـة مـزودة بعمـلـيـة داخـلـيـة * ، ل مـجـموعـة مـزودة بـعمـلـيـة داخـلـيـةT . تـا تشـاكل تقـابلـي مـن (مـج ، *) فـي (ل ،T) التـطبـيـق العـكسـي للتـطبـيـق تـا هـو تشـاكل تقابلـي من (ل ،T) نحـو (مـج ، *)

البـرهـان :

بمـا أن تـا تطبيق تقـابلـي يكون التطبيق تا$^{-1}$ تقابليًا.

لنبـرهن أن تا$^{-1}$ تشـاكل

مـهمـا كـان عَ وَ عً من ل، يـوجد سَ وَ سً مـن مـج حيـث :

عَ = تـا (سَ) وَ عً = تـا (سً)

لديـنـا :

تا$^{-1}$ (عَ T عً) = تا$^{-1}$ [تـا (سَ) T تـا (سً)]

= تا$^{-1}$ [تـا (سَ * سً)] لأن تـا تشـاكل.

= سَ * سً لأن : تا$^{-1}$ o تـا = $I_{مج}$

= تا$^{-1}$ (عَ) * تا$^{-1}$ (عً) لأن : عَ = تا (سَ) يـعنـي سَ = تا$^{-1}$ (عَ)

و عً = تـا (سً) $\Leftrightarrow$ سً = تا$^{-1}$ (عً)

إذن : $\forall$ (عَ ، عً) $\in$ ل^{2} : تا$^{-1}$ (عَ T عً) = تا$^{-1}$ (عَ) * تا$^{-1}$ (عً)

ومنه فإن $تا^{-1}$ تشاكل تقابلي.

3 – 4 – 2 – 3 : نظرية :

إذا كان تا تشاكل تقابلي من (**س** ، *) نحو (**ع** ، T)
وكانت (**س** ، *) زمرة تبديلية فإن (**ع** ،T) زمرة تبديلية.

البرهان :

تا تشاكل ⟺ ∀ (سَ ، سً) ∋ $\textbf{س}^2$: تا (سَ * سً) = تا (سَ)T تا (سً)

تا تقابلي ⟺ ∀ ع ∋ **ع** ، E س ∋ **س** وَ س وحيد : تا (س) = ع

نفرض أن (**س** ، *) زمرة تبديلية ونبرهن أن (**ع** ،T) زمرة تبديلية.

* T تبديلية في **ع** ⟺ ∀ (عَ ، عً) ∋ $\textbf{ع}^2$: عَ Tعً = عً T عَ

عَ T عً = تا (سَ) T تا (سً)

= تا (سَ * سً)

= تا (سً * سَ) = تا (سً) T تا (سَ)

= عً T عَ

ومنه T تبديلية

*T تجميعية في**ع** ⟺ ∀ (عَ ،عً ،عٍ) ∋ $\textbf{ع}^3$: عَT(عً Tعٍ) = (عَ Tعً)T عٍ.

عَ T (عً T عٍ) = تا (سَ)T [تا (سً) Tتا (سٍ)]

= تا (سَ) T تا (سً * سٍ)

= تا [سَ * (سً * سٍ)] = تا[(سَ * سً) * سٍ]

= تا (سَ * سً) T تا (سٍ)

= [تا (سَ) T تا (سً)] T تا(سٍ)

= (عَ T عً) T عٍ.

ومنه T تجميعية في **ع**

- **العنصر الحيادي** : ي هو العنصر الحيادي للعملية * .

لدينا : ع T تا (ي) = تا (س) T تا (ي)

= تا (س * ي) = تا (س) = ع

وكذلك : تا (ي)Tع = تا (ي) T تا(س)

= تا(ي*س) = تا(س) = ع.

وبالتالي : تا (ي) هو العنصر الحيادي للعملية T

- **العنصر النظير** : بما أن (**س** ، *) زمرة تبديلية فإن كل عنصر س من **س** يقبل

نظيرا سَ في **س** . إذن س * سَ = ي وَ سَ * س = ي حيث ي العنصر الحيادي للعملية * .

من : س * سَ = سَ * س = ي ينتج :

تا(س *سَ) = تا(سَ*س) = تا (ي) أي تا(س)T تا(سَ) =تا(سَ)T تا(س) = تا (ي)

أي : ع T عَ = عَ T ع = تا (ي)

إذن لكل عنصر من **ع** عنصر نظير.

ومنه : (ع ،T) زمرة تبديلية.

ملاحظات :

- إذا كانت (مج $_1$ ، *) زمرة وَ (مج $_2$ ،T) زمرة و كان φ تشاكلاً لِـ (مج $_1$ ، *) في (مج $_2$ ، T) نقول إن :

  الزمرتين (مج $_1$ ، *) وَ(مج $_2$ ،T) متشاكلتان وإذ كان φ تقابلي نقول

  إن : الزمرتين (مج $_1$ ، *) وَ (مج $_2$ ، T) متشاكلتان تقابليا

- إذا كانت (مج $_1$ ، * ،o) حلقة وَ(مج $_2$ ،⊥، T) حلقة وَ كان φ تطبيقا من (مج $_1$ ، * ، o) في(مج $_2$ ،⊥، T)

بحيث :

$$\forall (س_1 ، س_2) \ni مج_1^2 : \left.\begin{array}{l} \varphi\,(س_1 * س_2) = \varphi\,(س_1) \perp \varphi\,(س_2) \\ \varphi\,(س_1 \,o\, س_2) = \varphi\,(س_1)\, T\, \varphi\,(س_2) \end{array}\right\}$$

نقول أن الحلقتين متشاكلتان.

3 – 4 – 3 – تركيب تشاكلين :

نظرية :

ليكن التطبيق تا المعرف من (مج $_1$ ، *) في(مج $_2$ ؛ T) تشاكلا.
و ليكن التطبيق ها المعرف من(مج $_2$ ؛ T) في (مج $_3$ ،⊥)تشاكلا.
إن التطبيق هاoتا من(مج $_1$ ، *) في(مج $_3$ ،⊥) تشاكل.

البرهان :

∀(س ، ع) ∋ مج $_1^2$ لدينا :

(ها o تا) (س * ع) = ها [تا (س * ع)]

= ها [تا (س) T تا (ع)] (لأن تا تشاكل)

= ها [تا (س)] ⊥ ها (تا (ع)] (لأن ها تشاكل)

= (ها o تا) (س) $\perp$ (ها o تا) (ع)

إذن :

(هاo تا) (س * ع) = (ها o تا) (س) $\perp$ (ها o تا) (ع)

ومنه ها o تا تشاكل لِـ (مج$_1$ ، *) في(مج$_3$ ،$\perp$)

4 - تمارين التصحيح الذاتي :

4 – 1 : نعرف في المجموعة $\aleph$ علاقة © كما يلي :

$\forall$(س ، ص) $\ni \aleph^2$: (س © ص) $\Leftrightarrow$ س^2–ص^2 – 7 س + 7 ص = 0)

برهن أن © هي علاقة تكافؤ، عين أصناف التكافؤ الآتية $\bar{0}$ ، $\bar{9}$ و $\bar{أ}$. ($\partial \ni \aleph$).

عين مجموعة حاصل القسمة $\dfrac{\aleph}{©}$.

4 – 2 – © علاقة معرفة في مجموعة الأعداد الحقيقية$\Re$ كما يلي :

$\forall$(∂ ، ب) $\ni \Re^2$: (∂ © ب) $\Leftrightarrow$ (أ^3–ب^3 $\leq$ 0).

برهن أن © علاقة ترتيب، ما نوع هذا الترتيب ؟

4 – 3 – لنعتبر التطبيق تا للمجموعة$\Re$ - { 2 } في المجموعة$\Re$ - { 1 } المعرف كما يلي :

$$تا (س) = \frac{س + 5}{س - 2}$$

أثبت أن التطبيق تا تقابل. عين تطبيقه العكسي تا$^{-1}$.

4 – 4 - تا تطبيق معرف كما يلي :

تا :] 0 ، + ∞ [$\leftarrow$] – 2 ، + ∞ [: تا (س) = س^2 + س – 2

أثبت أن تا تقابل. عين تا$^{-1}$

4 – 5 – لنعتبر التطبيق تا المعرف بما يلي :

تا : $\Re \leftarrow \Re$: تا (س) = 5 س + 3.

نزود المجموعة $\Re$ بالعملية الداخلية * المعرّفة كما يلي :

$\forall$(∂ ، ب) $\ni \Re^2$: ∂ *ب =∂ + ب – 3. برهن أن ($\Re$ ، *) زمرة تبديلية

برهن أن تا تشاكل من ($\Re$ ، +) في ($\Re$ ، *)

5 – أجوبة التصحيح الذاتي :

5 – 1 نبرهن أن © علاقة تكافؤ :

(© إنعكاسية) ⟺ (∀س ∈ ℵ ، س © س)

∀ س ∈ ℵ، س^2 – س^2 – 7 س + 7 س = 0 أي أن س © س ومنه © إنعكاسية

(© تناظرية) ⟺ [∀(س ، ص) ∈ ℵ^2 : س © ص ⟸ ص © س].

∀ (س ، ص) ∈ ℵ^2 :

س © ص ⟸ س^2 – ص^2 – 7 س + 7 ص = 0 ⟸ ص^2 – س^2 – 7 ص + 7 س = 0

و منه ص © س أي أن © تناظرية.

(© متعدية) ⟺ ∀(س ، ص ، ع) ∈ ℵ^3 : (س © ص وَ ص © ع) ⟸ س © ع

∀ (س ، ص ، ع) ∈ ℵ^3 :

{ س © ص وَ ص © ع } ⟸ { س^2 – ص^2 – 7 س + 7 ص = 0 (1) وَ ص^2 – ع^2 – 7 ص + 7 ع = 0 (2) }

بجمع المساوتين (1) وَ (2) طرفا لطرف ينتج :

س^2 – ع^2 – 7 س + 7 ع = 0 أي س © ع وعليه © متعدية.

نستخلص مما سبق أن © علاقة تكافؤ.

تعيين أصناف التكافؤ :

$\bar{0}$ = { س ∈ ℵ / س © 0 }

$\bar{0}$ = { س ∈ ℵ / س^2 – 0^2 – 7 س + 7 (0) = 0 }

$\bar{0}$ = { س ∈ ℵ / س (س – 7) = 0 }

$\bar{0}$ = { 0 ، 7 }.

$\bar{9}$ = { س ∈ ℵ / س © 9 }

$\bar{9}$ = { س ∈ ℵ / س^2 – 9^2 – 7 س + 7 × 9 = 0 }

$\bar{9}$ = { س ∈ ℵ / (س + 9) (س – 9) – 7 (س – 9) = 0 }

$\bar{9}$ = { س ∈ ℵ / (س − 9) (س + 2) = 0 }

$\bar{9}$ = { 9 } لأن : $-2 \notin$ ℵ.

$\bar{أ}$ = { س ∈ ℵ / س © ∂ }

$\bar{أ}$ = { س ∈ ℵ / س^2 − أ^2 − 7 س + 7 ∂ = 0 }

$\bar{أ}$ = { س ∈ ℵ / (س − ∂) (س + ∂) − 7 (س − ∂) = 0 }

$\bar{أ}$ = { س ∈ ℵ / (س − ∂) (س + ∂ − 7) = 0 }

(س − ∂) (س + ∂ − 7) = 0 ⇔ س = ∂ أو س = 7 − ∂

إذا كان ∂ ≤ 7 فإن $\bar{أ}$ = { ∂ ، 7 − ∂ }

إذا كان ∂ > 7 فإن $\bar{أ}$ = { ∂ }

تعيين مجموعة حاصل القسمة $\frac{ℵ}{©}$

$\frac{ℵ}{©}$ = { { 0 ، 7 }، { 1 ، 6 }، { 2 ، 5 }، { 3 ، 4 }، { 8 } ، { 9 } ، { 10 } ،...... }

2 – نبرهن أن ع علاقة ترتيب :

- © إنعكاسية ⇔ (∀ ∂ ∈ ℜ، ∂ ع ∂)

∀ ∂ ∈ ℜ ، $\hat{C}^3 - \partial^3 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \geq 0$ و منه ∂ © ∂ إذن © إنعكاسية

(© ضد تناظرية) ⇔ (∀ (∂ ، ب) ∈ ℜ^2 : (∂ © ب وَ ب © ∂) ⇐ ∂ = ب).

أ©ب وَ ب © أ ⇒ أ^3−ب^3≥0 وَ ب^3−أ^3≥0 ⇒ أ^3−ب^3≥0 وَ −(أ^3−ب^3) ≥ 0 ....(I)

ينتج من الجملة **(I)** أن ، أ^3 = ب^3 أي ∂ = ب و منه © ضد تناظرية.

(© متعدية)⇔ [∀ (∂ ، ب، جـ)∈ ℜ^3 : (∂ © ب وَ ب © جـ) ⇐ ∂ © جـ)

أ©ب وَ ب © جـ ⇒ أ^3−ب^3≥0 (1) وَ ب^3− جـ^3≥0 (2)

بجمـــع (1) و (2) طــــرفاً لطــــرف ينـــتج : $\left(أ^3 - ب^3\right) + \left(ب^3 - جـ^3\right) \geq 0$ أي $أ^3 - جـ^3 \geq 0$ إذن ∂ © جـ وعليه© علاقة متعدية في $\Re$.

ينتج مما سبق أن © علاقة ترتيب في $\Re$.

نلاحظ أن : $\forall$ (∂ ، ب) $\in \Re^2$: $أ^3 - ب^3 \geq 0$ ب $^3 -$ أ $^3 \geq 0$

أي $\forall$ (∂ ، ب) $\in \Re^2$ $\partial \leq$ ب أو ب $\leq \partial$

إذن القضية : [($\partial \leq$ ب) أو (ب $\leq \partial$)] صحيحة من أجل كل ∂ وَ ب من $\Re$ إذن © علاقة ترتيب كلي في $\Re$.

5 – 3 (تا تطبيق) $\Leftrightarrow$ (تا متباين وَ تا غامر).

(تا متباين) $\Leftrightarrow \forall$ $س_1 \in \Re - \{2\}$ ، $\forall$ $س_2 \in \Re - \{2\}$: تا $(س_1) =$ تا $(س_2) \Rightarrow س_1 = س_2$

لدينا تا$(س_1)$ = $\dfrac{س_1 + 5}{س_1 - 2}$ و َ تا $(س_2)$ = $\dfrac{س_2 + 5}{س_2 - 2}$

نفرض أن تا$(س_1)$ = تا $(س_2)$ ونثبت أن $س_1 = س_2$

لدينا : $\dfrac{س_1 + 5}{س_1 - 2} = \dfrac{س_2 + 5}{س_2 - 2} \Leftarrow (س_1 + 5)(س_2 - 2) = (س_2 + 5)(س_1 - 2)$

$\Leftarrow 7س_2 = 7س_1$

$\Leftarrow س_2 = س_1$ إذن تا متباين.

* تا غامر $\Leftrightarrow$ [$\forall$ ع $\in \Re - \{1\}$ ، E س $\in \Re - \{2\}$: تا (س) = ع].

نحل المعادلة ع = تا(س) في المجموعة $\Re - \{2\}$ ذات المجهول س.

ع = تا (س) $\Leftrightarrow$ ع = $\dfrac{س + 5}{س - 2} \Leftrightarrow$ ع (س – 2) = س + 5

$\Leftrightarrow$ س (ع – 1) = 2 ع + 5

$\Leftrightarrow$ س (ع – 1) = 2 ع + 5

$\Leftrightarrow$ س = $\dfrac{2ع + 5}{ع - 1}$ (ع $\neq 1$)

ومنه س موجودة من أجل كل ع من $\Re - \{1\}$ ، س $\in \Re - \{2\}$

إذن تا غامر، وعليه تا تقابل.

ومنه تا يقبل تطبيقا عكسيا. لتعيينه نحسب س بدلالة ع من العلاقة ع = تا(س)

فنجد س = $\frac{2\text{ع}+5}{\text{ع}-1}$

إذن التطبيق العكسي تا$^{-1}$ للتطبيق تا معرف كما يلي :

تا$^{-1}$: $\Re - \{1\} \leftarrow \Re - \{2\}$: تا$^{-1}$ (س) =. $\frac{2\text{س}+5}{\text{س}-1}$

5 – 4 – ليكن التطبيق تا :] 0 ،+∞ [←] −2 ، +∞ [: تا(س) = س^2+س − 2

تا تقابل إذا وفقط إذا كان :

($\forall$ ع ∋] − 2 ، +∞[، E س∈] 0 ،+∞ [وحيد : ع = س^2 + س − 2

ع = س^2 + س − 2 ⟺ س^2 + س − 2 − ع = 0 ....(1)

نحسب المميزةΔ :

Δ = ب^2 − 4 ∂ جـ = $(1)^2$ − 4 (1) (− 2 − ع) = 1 + 8 + 4 ع = 4 ع +9.

فرضا ع ≤ − 2 فيكون 4 ع≤ − 8 ومنه 4 ع + 9 ≤ 1

ومنه Δ > 0 من أجل كل ع من] − 2 ، + ∞ [

المعادلة (1) تقبل حلين متمايزين في$\Re$.

س$_1$ = $\frac{-1-\sqrt{4\text{ع}+9}}{2}$ ، س$_2$ = $\frac{-1+\sqrt{4\text{ع}+9}}{2}$

ولكن : س$_1$ ∉] 0 ، + ∞ [. فلنبين أن : س$_2$ ∋] 0 ، + ∞ [

لدينا 4 ع + 9 ≤ 1 ⟸ $1 \le \sqrt{4\text{ع}+9}$ ومنه $\frac{-1+\sqrt{4\text{ع}+9}}{2} \ge 0$

ومنه المعادلة (1) تقبل حلاً وحيدًا في] 0 ، + ∞ [

إذن تا تطبيق تقابلي فهو يقبل تطبيقاً عكسيا تا$^{-1}$حيث :

تا$^{-1}$:] − 2 ، + ∞ [←] 0 ، + ∞ [: تا$^{-1}$ (س) = $\frac{-1+\sqrt{4\text{س}+9}}{2}$

5 – 5 – لنبرهن أن ($\Re$ ، *) زمرة تبديلية.

- خاصية التبديل :

* تبديلية في $\Re$ ⟺ [$\forall$(∂ ، ب) ∋ $\Re^2$: ∂ * ب = ب * ∂]

$\forall$(∂ ، ب) ∋ $\Re^2$: ∂ * ب = ∂ + ب – 3 = ب + ∂ − 3 (لأن الجمع تبديلي في$\Re$)

= ب *∂ ومنه * تبديلية في$\Re$

• خاصية التجميع :

* تجميعية في $\Re$ $\Leftrightarrow$ [$\forall$ (∂ ، ب ، جـ) $\in$ $\Re^3$: (∂ * ب) *جـ = ∂ *(ب * جـ)]

$\forall$ (∂ ، ب ، جـ) $\in$ $\Re^3$: (∂ * ب) * جـ = (∂ + ب − 3) * جـ

= ∂ + ب − 3 + جـ −3

= ∂ + (ب − 3 + جـ) − 3.

= ∂ * (ب + جـ − 3).

= ∂ * (ب * ج)

ومنه * تجميعية في $\Re$.

• **العنصر الحيادي :**

يكون العنصر ي من $\Re$ عنصرًا حياديا بالنسبة للعملية * إذا كان : $\forall$ ∂ $\in$ $\Re$: ∂

* ي = ∂ وَ ي * ∂ = ∂

بما أن العملية * تبديلية في $\Re$ يكفي حل المعادلة ∂ * ي = ∂.

∂ * ي = ∂ $\Leftrightarrow$ ∂ + ي − 3 = ∂ $\Leftrightarrow$ ي = 3.

إذن * تقبل عنصرًا حيادياً في $\Re$ وهو ي = 3.

• العنصر النظير :

يكون العنصر ∂ من $\Re$ نظيراً للعنصر ∂ من $\Re$ بالنسبة إلى * إذا كان :

∂ * ∂ = ي وَ ∂ * ∂ = ي حيث ي هو العنصر الحيادي للعملية *.

بما أن العملية * تبديلية في $\Re$ إذن يكفي حل المعادلة : ∂ * ∂ = ي.

∂ * ∂ = ي $\Leftrightarrow$ ∂ + ∂ − 3 = 3 $\Leftrightarrow$ ∂ = 6 − ∂.

إذن لكل عنصر من $\Re$ عنصر نظير في $\Re$.

إذن ($\Re$ ، *) زمرة تبديلية.

• نبرهن أن تا تشاكل من ($\Re$ ، +) في ($\Re$ ، *).

تا تشكل $\Leftrightarrow$ [$\forall$(∂ ، ب) $\in$ $\Re^2$: تا (∂ + ب) = تا (∂) * تا (ب)]

تا (∂ + ب) = 5 (∂ + ب) + 3 = 5 ∂ + 5 ب + 3.

تا (∂) * تا (ب) = تا(∂) +تا(ب) − 3 (حسب تعريف العملية *)

= 5 ∂ + 3 + 5 ب + 3 − 3

= 5 ∂ + 5 ب + 3 = تا (∂ + ب).

أي أن : تا (∂ + ب) = تا (∂) * تا (ب).

ومنه تا تشاكل من ($\Re$ ، +) في ($\Re$ ، *).