

COURS MATHS

1/Fonction composée

Définition :

Soient deux fonctions, f définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et g définie sur un intervalle $J \subseteq \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, f(x) \in J$ (i.e., $f(I) \subseteq J$).

La **fonction composée** $g \circ f$ est la fonction définie sur I par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) :$$

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) = (g \circ f)(x) \quad x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

où $x \in I$ et $f(x) \in J$, afin que $g(f(x))$ existe.

Remarque : Si $g \circ f$ existe, la fonction composée $f \circ g$ n'existe pas toujours, et lorsque $f \circ g$ existe alors en général $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemples :

- Soient f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ avec $D_f = \mathbb{R}^+$ $D_f = \mathbb{R}^+ D_f = \mathbb{R}^+$ $f(x) = \sqrt{x} f(x) = \sqrt{x}$
- Soient g définie par $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$ avec $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\} D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $g(x) = \frac{1+x}{1-x} g(x) = \frac{1+x}{1-x}$
- Soient f définie par $f(x) = 2x^2 + x + 1$ avec $D_f = \mathbb{R}$ $D_f = \mathbb{R} D_f = \mathbb{R}$
- Soient g définie par $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$ avec $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\} D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $g(x) = \frac{1+x}{1-x} g(x) = \frac{1+x}{1-x}$

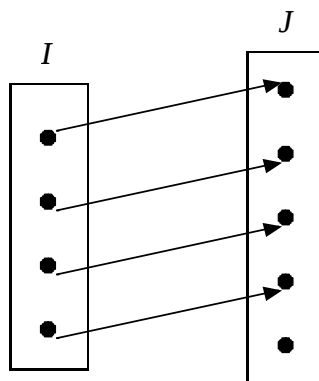
2/ Injectivité, surjectivité, bijectivité

- On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow J$ est injective si tout élément de $f(I)$ est l'image d'un seul élément de I . Autrement dit, f est injective si et seulement si :

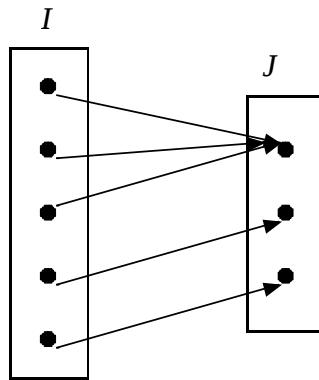
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

L'injectivité d'une fonction se traduit également par le fait que « tout élément de J admet au plus un antécédent par f dans I ».

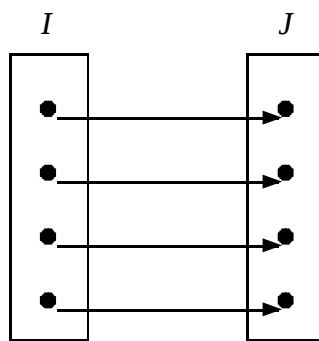


- On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow J$ est surjective si $f(I) = J$ $f(I) = J f(I) = J$, autrement dit si tout élément de J est l'image par f d'au moins un élément de I .



Remarque : La fonction $f : I \rightarrow f(I)$ est toujours surjective.

- On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow J$ est bijjective si elle est à la fois injective et surjective.



Exemples :

(1) Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$

$$f(x) = x^3 \quad f(x) = x^3$$

f est-elle surjective ? injective ?

[Réponse](#)

(2) Considérons maintenant la fonction définie par $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ avec } f(x) = x^2$$

$$f(x) = x^2 \quad f(x) = x^2$$

f est-elle surjective ? injective ?

3/ Fonction réciproque

3.1 Définition

Définition :

Soit $f : I \rightarrow J$ $f : I \rightarrow J$. On dit que f admet une fonction réciproque s'il existe $g : J \rightarrow I$ $g : J \rightarrow I$ telle que $f \circ g = Id_J$ $f \circ g = Id_J$ et $g \circ f = Id_I$ $g \circ f = Id_I$.

On dit alors que g est la fonction réciproque de f et on note $g = f^{-1}$ $g = f^{-1}$.

Proposition :

Soit $f : I \rightarrow J$ $f : I \rightarrow J$. Alors f admet une fonction réciproque si et seulement si f est bijective.

Démonstration

Remarques :

- Par extension, la définition et la proposition précédentes restent valables pour une fonction $f : D_1 \rightarrow D_2$ $f : D_1 \rightarrow D_2$, où D_1 D_1 et D_2 D_2 sont des parties de $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$.
- Sous l'hypothèse que f^{-1} f^{-1} existe, si l'image de x par f est y , alors l'image de y par f^{-1} f^{-1} est x ; en d'autres termes :

$$y = f(x) \quad y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow$$

$$x = f^{-1}(y) \quad x = f^{-1}(y) \quad x = f^{-1}(y)$$
- Il ne faut pas confondre la fonction réciproque f^{-1} f^{-1} , avec la fonction inverse $1/f$ $1/f$.

3.2 Conséquences

Si f^{-1} f^{-1} existe, alors $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$, où Id Id est la fonction identité :

$$f \circ f^{-1} : J \rightarrow J \quad f \circ f^{-1} : J \rightarrow J$$

$$f \circ f^{-1} : J \rightarrow J \quad \text{donc} \quad f \circ f^{-1} = Id_J \quad f \circ f^{-1} = Id_J$$

$$f \circ f^{-1} = Id_J \quad \text{avec} \quad Id_J : J \rightarrow J, y \mapsto y$$

$$Id_J : J \rightarrow J, y \mapsto y \quad Id_J : J \rightarrow J, y \mapsto y$$

$$f^{-1} \circ f : I \rightarrow I$$

$$\text{donc } f^{-1} \circ f = Id_I$$

$$\text{avec } Id_I : I \rightarrow I, x \mapsto x$$

$$Id_I : I \rightarrow I, x \mapsto x \quad Id_I : I \rightarrow I, x \mapsto x$$

$$f^{-1} \circ f : I \rightarrow I \quad f^{-1} \circ f : I \rightarrow I$$

$$f^{-1} \circ f = Id_I \quad f^{-1} \circ f = Id_I$$

Du point de vue graphique, les représentations de deux fonctions réciproques se déduisent l'un de l'autre par une symétrie par rapport à la première bissectrice.

Justification

Exemples :

• Soit la fonction f définie par $f(x) = ax + b$

$$f(x) = ax + b$$

$f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$ $a \neq 0, a \neq 0$.

On a donc $y = ax + b$ $y = ax + b, y = ax + b$ d'où l'on tire $x = \frac{y-b}{a}$

$$x = \frac{y-b}{a} \quad x = \frac{y-b}{a}$$

Donc la fonction réciproque de f est définie par $g(x) = \frac{x-b}{a}$

$$g(x) = \frac{x-b}{a} \quad g(x) = \frac{x-b}{a}$$

• Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

La fonction réciproque g est alors définie par $g(x) = \frac{1+2x}{1-x}$

$$g(x) = \frac{1+2x}{1-x} \quad g(x) = \frac{1+2x}{1-x}$$

3.3 Application : définition de la fonction racine carrée

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ par :

$$y = f(x) = x^2$$

$$y = f(x) = x^2 \quad y = f(x) = x^2$$

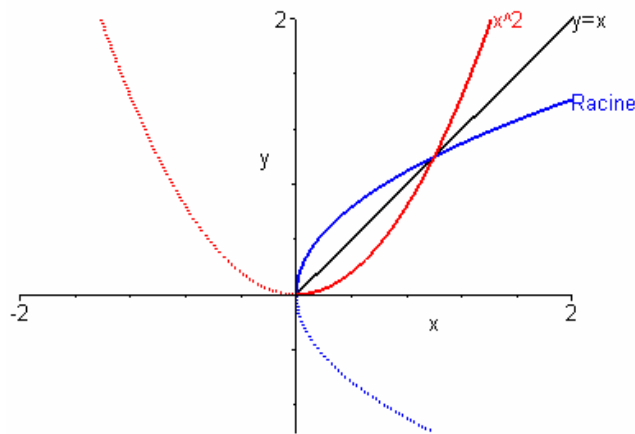
Nous avons vu plus haut que la fonction f n'est pas bijective puisqu'à une valeur de y correspondent deux valeurs de x ; par conséquent elle n'admet pas de fonction réciproque.

Par contre, si on réduit l'ensemble de définition soit à $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ [0; +\infty[$ soit à $\mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^-]-\infty; 0]$, la même fonction f devient bijective, et admet alors une fonction réciproque.

Par convention, on choisit $I = \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ [0; +\infty[$, et on appelle racine carrée de x , notée $\sqrt{x}$ cette fonction réciproque. D'où :

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \quad \left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$$



Une méthode fort ancienne (que l'on doit à [Héron d'Alexandrie](#)) permet d'extraire la racine carrée d'un nombre quelconque par un procédé itératif, autrement dit « comment calcule-t-on rapidement une racine carrée lorsque les batteries de la calculatrice sont épuisées? ».

Bon chance avec le FORUM www.fsjes-casablanca.c.la