

**EXERCICE 1**

- 1) Soit  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. Montrer que l'ensemble des suites réelles qui sont négligeables devant  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lorsque  $n$  tend vers  $\infty$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel pour les lois usuelles sur les suites.
- 2) Montrer que l'ensemble des fonctions 1-périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel pour les lois usuelles sur les applications.
- 3) L'ensemble des applications croissantes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est-il un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel pour les lois usuelles sur les applications ? Et si on remplace « croissantes » par « monotones » ?  
Et l'ensemble des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui sont somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante ?

**EXERCICE 2**

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

- 1)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 / x = y\}$ .
- 2)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - 5y - 1 = 0\}$ .
- 3)  $\{(x, 2x, 3x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ .
- 4)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\}$ .
- 5)  $\{(1, y)\}_{y \in \mathbb{R}}$ .
- 6)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ .
- 7)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y \text{ et } 3y - 2z = 0\}$ .
- 8)  $\{P \in \mathbb{K}[X] / \partial^2 P \geq 2\}$ .
- 9)  $\{P \in \mathbb{K}[X] / P(X^2) = P' + X^4 P\}$ .
- 10)  $\{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(0) + f(1) = f'(0)\}$ .

**EXERCICE 3**

- 1)  $(6\sqrt{2} - 15, 12 - 5\sqrt{3})$  est-il combinaison linéaire de  $(1, \sqrt{2})$  et de  $(\sqrt{3}, 1)$  ?
- 2)  $(5, 5, 1)$  est-il combinaison linéaire de  $(2, 3, 0)$  et  $(3, 2, 0)$  ?
- 3)  $16X^3 - 7X^2 - 4 + 21X$  est-il combinaison linéaire de  $8X^3 - 5X^2 + 1$  et  $X^2 + 7X - 2$  ?
- 4) Dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $x \mapsto \sin(2x)$  est-elle combinaison linéaire de sinus et cosinus ?

**EXERCICE 4**

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

- 1)  $\begin{cases} \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) \longmapsto xy \end{cases}$ .
- 2)  $\begin{cases} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K} \\ P \longmapsto P(0) + P'(1) \end{cases}$ .
- 3)  $\begin{cases} \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ f \longmapsto (\operatorname{Re}(f(0)), |f(1)|) \end{cases}$ .
- 4)  $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x + 1 \end{cases}$ .
- 5)  $\begin{cases} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ P \longmapsto P(X^2) - (P(X))^2 \end{cases}$ .
- 6)  $\begin{cases} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R} \\ P \longmapsto \int_0^1 P(t) dt \end{cases}$ .

**EXERCICE 5**

Montrer que les applications suivantes sont linéaires ; déterminer ensuite leur noyau et leur image. Sont-elles injectives/surjectives/bijectives ? Déterminer la réciproque de celles qui sont bijectives.

- 1)  $\begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (2x, x - z, x + y + z) \end{cases}$ .
- 2)  $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto (y, x, x + y) \end{cases}$ .

$$3) \quad \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x + y, 2x + 2y) \end{cases} \quad 4) \quad \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x + 3y, x - 3y) \end{cases}.$$

**EXERCICE 6**

Soit  $n \in \mathbb{N}^\times$ . Déterminer le noyau de l'application  $\begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ P \longmapsto P - XP' - P(0) \end{cases}$ .

**EXERCICE 7**

Soit  $\Gamma$  l'application  $\begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \longmapsto f'' - 2f' + f \end{cases}$ . Montrer que  $\Gamma$  est un endomorphisme surjectif de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et déterminer son noyau.

**EXERCICE 8**

Soient  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ .

Montrer que  $f(\operatorname{Ker}(g \circ f)) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$ .

**EXERCICE 9**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

- 1) Montrer que  $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} f^2$  et que  $\operatorname{Im} f^2 \subseteq \operatorname{Im} f$ .
- 2) Montrer que :  $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\} \iff \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$ .
- 3) Montrer que :  $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \iff \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$ .

**EXERCICE 10**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $h \in \mathcal{L}(E)$ .

On suppose que :  $\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K} / h(x) = \lambda x$ .

Montrer que :  $\exists \lambda \in \mathbb{K} / \forall x \in E, h(x) = \lambda x$ , i.e. que  $h$  est une homothétie de  $E$ .

**EXERCICE 11**

- 1) Montrer que  $\mathbb{K}_1[X] = \operatorname{Vect}(X - 1, X + 1)$ .
- 2) Montrer que  $\mathbb{K}_2[X] = \operatorname{Vect}\left((X - 1)^2, (X - 1)(X + 1), (X + 1)^2\right)$ .
- 3) Montrer que  $\mathbb{K}^3 = \operatorname{Vect}\left((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\right)$ .
- 4) Montrer que  $\operatorname{Vect}\left((1, 3, 5), (2, 5, -2)\right) = \operatorname{Vect}\left((3, 8, 3), (-1, -2, 7)\right)$ .

**EXERCICE 12**

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et déterminer une famille génératrice de chacun d'eux :

- 1)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + z = 0 \text{ et } 2x + y + 3z = 0\}$ .
- 2)  $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 0 \text{ et } 2x - z + t = 0\}$ .
- 3)  $\{P \in \mathbb{K}_3[X] / P(X^2) = (X^3 + 1)P\}$ .

**EXERCICE 13**

Dans les deux cas suivants, déterminer **Ker**  $f$  et **Im**  $f$  ainsi qu'une famille génératrice de chacun de ces sous-espaces vectoriels.

- 1)  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto (4x + 2t, 3x + z + t, 2x + y + 2t, x + y + 5z - t) \end{cases}$
- 2)  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto (2x - y + z + 5t, -x + 2y + 3z - 4t, x + 5z + 6t) \end{cases}$

**EXERCICE 14**

Montrer que toute famille de polynômes non nuls de degrés distincts est libre.

**EXERCICE 15**

Montrer que les suites  $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$  forment une famille libre de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

**EXERCICE 16**

Soient  $n \in \mathbb{N}^\times$  et  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  des réels distincts tels que  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ .

- 1) Montrer que la famille  $\left(x \mapsto e^{\lambda_i x}\right)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille libre de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
- 2) Montrer que la famille  $\left(x \mapsto |x - \lambda_i|\right)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille libre de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Indication :** On tiendra compte du fait que la valeur absolue n'est pas partout dérivable.

**EXERCICE 17**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $n \in \mathbb{N}^\times$  et  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  une famille libre de  $E$ . Montrer que  $(u_1 + u_2, u_2 + u_3, \dots, u_{n-1} + u_n)$  est également libre.

**EXERCICE 18**

On rappelle que  $\mathbb{Q}$  est un corps.

- 1) Vérifier que  $\mathbb{R}$  est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel pour les lois d'addition et de multiplication usuelles.
- 2) Soient  $p_1, p_2, \dots, p_n$  des nombres premiers distincts. Montrer que la famille  $(\ln p_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille libre du  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}$ .
- 3) En déduire que  $\ln p$  est rationnel pour au plus un nombre premier  $p$ . Avec d'autres techniques, on peut en fait montrer que  $\ln r$  est irrationnel pour tout  $r \in \mathbb{Q}_+^\times \setminus \{1\}$ .

**EXERCICE 19**

- 1) Montrer que  $\left((-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)\right)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer les coordonnées du vecteur  $(8, 4, 2)$  dans cette base.
- 2) Montrer que  $\left((X - 1)^2, X^2, (X + 1)^2\right)$  est une base de  $\mathbb{K}_2[X]$  et déterminer les coordonnées de  $X^2 + X + 1$  dans cette base.

**EXERCICE 20**

On pose  $P_0 = 1$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}^\times$  :  $P_k = \frac{1}{k!} X(X - 1)(X - 2) \dots (X - k + 1)$ .

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

**EXERCICE 21**

- 1) Montrer que  $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x + 2y - z = 0\right\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  et en déterminer une base.
- 2) Même question avec  $\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y - 2z + 2t = 0 \text{ et } x = y\right\}$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

**EXERCICE 22**

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Montrer que :

$$F \cup G = F + G \quad \Longleftrightarrow \quad F \subseteq G \text{ ou } G \subseteq F.$$

**EXERCICE 23**

Montrer que  $\mathbb{K}_1[X]$  et **Vect** $(1 + X + X^2)$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{K}_2[X]$ .

**EXERCICE 24**

Montrer que les deux ensembles suivants sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y\right\} \quad \text{et} \quad \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2z = 0 \text{ et } -y + 2z = 0\right\}.$$

**EXERCICE 25**

Notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble des applications paires de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{I}$  l'ensemble des applications impaires de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{I}$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

**EXERCICE 26**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F_1, F_2$  et  $G$  trois sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- 1) Si  $F_1$  et  $F_2$  sont en somme directe, montrer que  $F_1 \cap G$  et  $F_2 \cap G$  le sont aussi.
- 2) Si  $F_1$  et  $F_2$  sont supplémentaires dans  $E$ ,  $F_1 \cap G$  et  $F_2 \cap G$  le sont-ils dans  $G$  ?

**EXERCICE 27**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . Montrer que  $E = \mathbf{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \mathbf{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ .

**EXERCICE 28**

- 1) Soit  $E$  l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{R}_3[X]$  qui sont divisibles par  $(X - 1)$ . Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_3[X]$  et déterminer un supplémentaire simple de  $E$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$ .
- 2) Même question avec  $(X - 1)(X - 2)$  à la place de  $(X - 1)$ .

**EXERCICE 29**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $E$ . On suppose que  $p$  et  $q$  commutent, i.e.  $p \circ q = q \circ p$ . Montrer que  $p \circ q$  est le projecteur de  $E$  sur **Im**  $p \cap \mathbf{Im}$   $q$  de direction **Ker**  $p + \mathbf{Ker}$   $q$ .

**EXERCICE 30**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $E$ . Montrer que  $p + q$  est un projecteur de  $E$  si et seulement si  $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . Montrer que, dans ce cas,  $\mathbf{Im} p$  et  $\mathbf{Im} q$  sont en somme directe et que  $p + q$  est le projecteur de  $E$  sur  $\mathbf{Im} p + \mathbf{Im} q$  de direction  $\mathbf{Ker} p \cap \mathbf{Ker} q$ .

**EXERCICE 31**

Soit  $u$  l'application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad u(x, y, z) = (x + 2y, 4x - y, -2x + 2y + 3z).$$

Montrer que  $u$  est linéaire et que  $\frac{1}{3} u$  est une symétrie de  $\mathbb{R}^3$ . En déduire que  $u$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer sa réciproque.

**EXERCICE 32**

- 1) Soient  $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{array} \right\}$   
et  $G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \end{array} \right\}$ .

Montrer que  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer l'expression de la projection sur  $G$  parallèlement à  $F$ .

- 2) Même question avec  $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \end{array} \right\}$   
et  $G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{l} x + y = 0 \end{array} \right\}$ .

**EXERCICE 33**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que :

$$f^2 - (\lambda + 1)f + \lambda \text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Montrer que  $\mathbf{Ker} (f - \text{Id}_E)$  et  $\mathbf{Ker} (f - \lambda \text{Id}_E)$  sont supplémentaires dans  $E$  et que  $f$  est l'affinité de base  $\mathbf{Ker} (f - \text{Id}_E)$ , de direction  $\mathbf{Ker} (f - \lambda \text{Id}_E)$  et de rapport  $\lambda$ .

**EXERCICE 34**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $p$  un projecteur de  $E$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on note  $a_\lambda$  l'affinité  $\lambda \text{Id}_E + (1 - \lambda)p$ .

- 1) Montrer que :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad a_\lambda \circ a_\mu = a_{\lambda\mu}$ .  
2) Montrer que  $a_\lambda$  est inversible si et seulement si  $\lambda \neq 0$ .  
3) Montrer que  $\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{K}^\times & \longrightarrow \mathcal{GL}(E) \\ \lambda & \longmapsto a_\lambda \end{array} \right.$  est un isomorphisme de groupes.