Par Hugues Sila PDG du groupe Al Kashi

« Ce qui étonne, étonne une fois, mais ce qui est admirable est de plus en plus admiré. »

Exercice 1 (3 points)

1. Soit la suite u définie par $u_0 = 0, u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$.

a. Calculer u_1, u_2, u_3. On exprimera chacun des termes sous forme d'une fraction irréductible.

b. Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

c. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.

2. Soit v la suite définie par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

a. Monter que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

b. Soit S_n la somme définie pour tout entier n non nul par $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$. Exprimer S_n en fonction de n. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2 (4 points)

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes, U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans U_1, deux boules noires dans U_2 et une boule noire dans U_3. Toutes les autres boules dans les urnes sont blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la manière suivante :

le joueur lance le dé,

* s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans U_1 ;
* s'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_2, note sa couleur et la remet dans U_2 ;
* si le numéro amené par le dé n'est ni 1 ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_3, note sa couleur et la remet dans U_3.

On désigne par A, B, C et N les événements suivants :

A : « Le dé amène le numéro 1 ».

B : « Le dé amène un multiple de 3 ».

C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni 1 ni un multiple de 3 ».

N : « La boule tirée est noire ».

1. Le joueur joue une partie.

a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3k}$.

b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

c. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{2}$.

d. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$.

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\frac{1}{30}$. Le joueur fait 20 parties, indépendantes les unes des autres. Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3} près la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

Exercice 3 (8 points)

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$.

1. a. Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et $+\infty$.

b. Etudier le sens de variation de φ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une dans l'intervalle $[1 ; +\infty[$ qui sera notée α.

Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le présenter dans un tableau.

Partie B : Etude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire

Sur la feuille jointe sont tracées les courbes représentatives de deux fonctions f et g. Ces fonctions sont définies par $f(x) = (2x+1)e^{-x}$ et $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$. Ces courbes sont notées C_f et C_g.

1. Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées (0 ; 1) et admettent en ce point la même tangente.

2. a. Démontrer que pour tout réel x, $f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction étudiée dans la partie A.

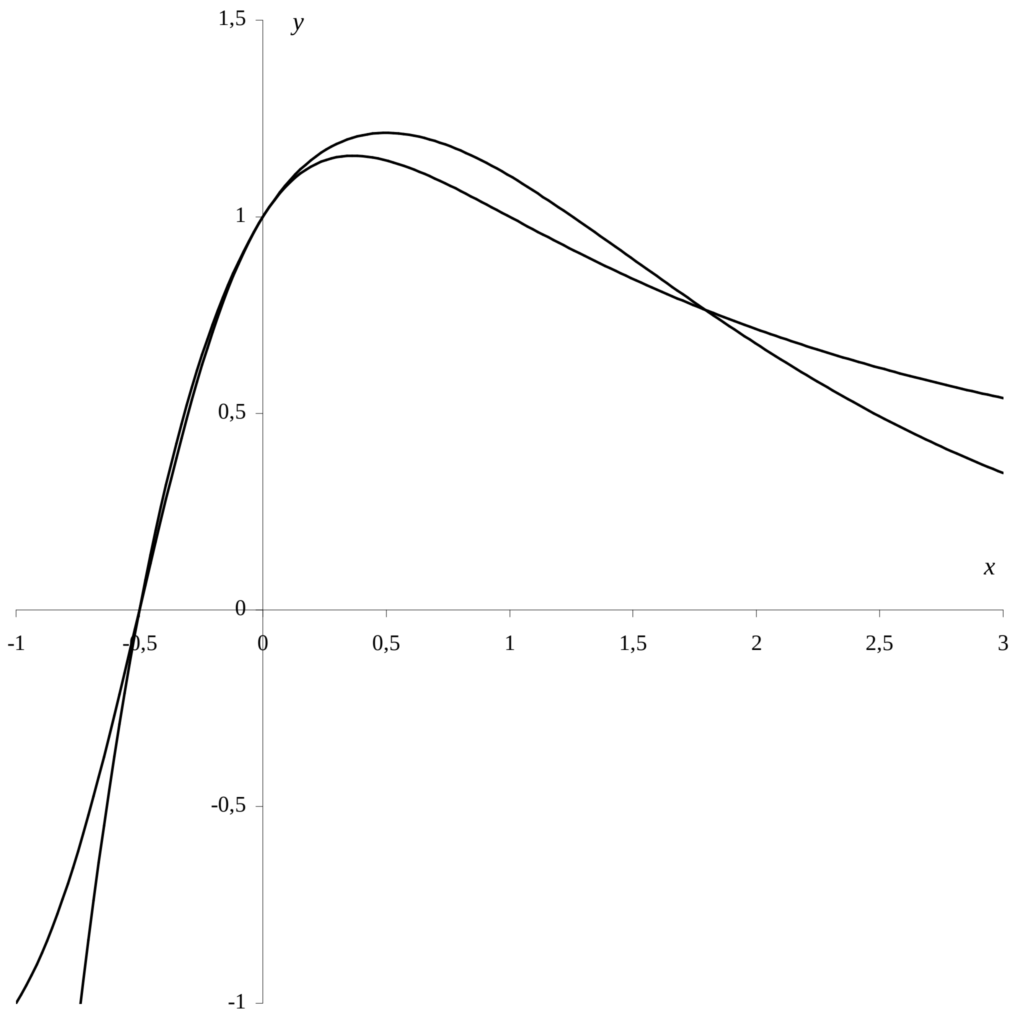
b. A l'aide d'un tableau étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire la position relative des courbes C_f et C_g.

3. a. Montrer que la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(-2x-3)e^{-x}-\ln(x^2+x+1)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f-g$.

b. En déduire l'aire S, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par les deux courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x=-\frac{1}{2}$ et $x=0$.

Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-4} près de cette aire.



Exercice 4 (5 points,)

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2-2z+4=0$. Les solutions seront notées z' et z'', z' étant la solution dont la partie imaginaire est positive. Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2. Donner la valeur exacte de $(z')^{2004}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

1. Montrer que les points A d'affixe $1+i\sqrt{3}$ et B d'affixe $1-i\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon. Tracer ce cercle puis construire les points A et B.

2. On note O' l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et B' l'image de B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$. Calculer les affixes des points O' et B et construire ces points.

3. Soit I le milieu du segment $[OB]$.

a. Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle $AO'B'$?

b. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$. Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{O'B'}$ est égale à $3\sqrt{3}-i$.

c. La conjecture émise à la question 2. a. est-elle vraie ?

Exercice 4 (5 points, TlE c)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(0\ ;5\ ;5)$ et $B(0\ ;0\ ;10)$.

1. Dans cette question on se place dans le plan P_0 d'équation $x = 0$, rapporté au repère $(0\ ;\vec{j}, \vec{k})$. On note (C) le cercle de centre B passant par A. Démontrer que la droite (OA) est tangente à (C).

2. On nomme (S) la sphère engendrée par la rotation du cercle (C) autour de l'axe (Oz) et (Γ) le cône engendré par la rotation de la droite (OA) autour de l'axe (Oz).

a. Démontrer que le cône (Γ) a pour équation $x^2+y^2=z^2$.

b. Déterminer l'intersection du cône (Γ) et de la sphère (S). Préciser la nature de cette intersection et ses éléments caractéristiques.

c. Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.

3. On coupe le cône (Γ) par le plan P_1 d'équation $x = 1$. Dans P_1 l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection. Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.

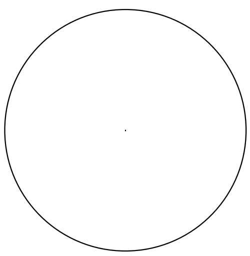


figure 1

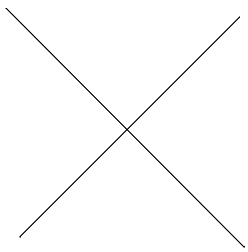


figure 2

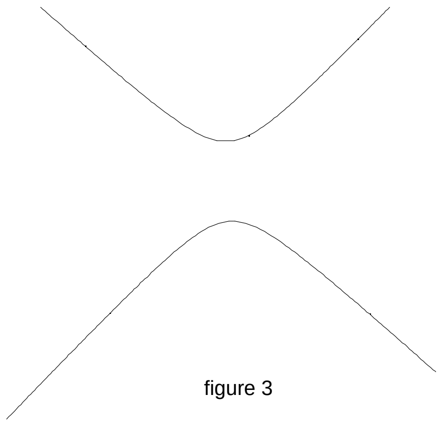


figure 3

4. Soit $M(x\ ;y\ ;z)$ un point de (Γ) dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls. Démontrer que x et y ne peuvent être simultanément impairs." L'admiration est la fille de l'ignorance. "

Correction   du sujet 1

Exercice 1 (3 points)

1. a. On a $u_0 = 0$, $u_1 = \dfrac{1}{2-0} = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{2-1/2} = \dfrac{2}{3}$, $u_3 = \dfrac{1}{2-2/3} = \dfrac{3}{4}$.

b. On voit facilement que les termes de u_n sont ceux de $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

c. Par récurrence (ainsi que demandé) ; on vérifie au rang 0 : $u_0 = 0,\ w_n = \dfrac{0}{1} = 0$, ok.

Supposons alors que $u_n = w_n$ et montrons que $u_{n+1} = w_{n+1}$: ceci est équivalent à $\dfrac{1}{2-u_n} = \dfrac{n+1}{n+2}$, soit $2 - u_n = \dfrac{n+2}{n+1} \Leftrightarrow u_n = 2 - \dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{2n+2-n-2}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$. Tout va bien.

2. a. $v_1 = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $v_2 = \ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$, $v_3 = \ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

On peut utiliser $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$: $v_1 + v_2 + v_3 = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 = -\ln 4$ ou bien

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$: $v_1 + v_2 + v_3 = \ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \ln\dfrac{3}{4} = \ln\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3}\dfrac{3}{4}\right) = \ln\dfrac{1}{4} = -\ln 4$.

De toutes manières ceci montre la méthode à utiliser pour la dernière question.

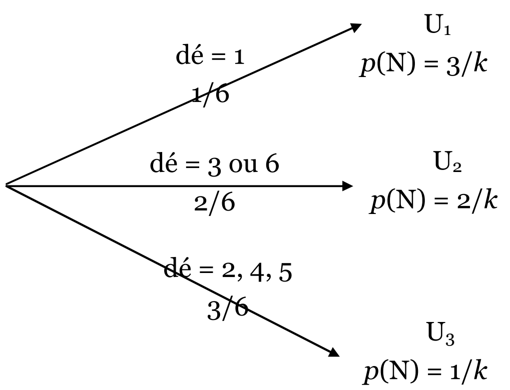
b. $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \ldots + \ln\dfrac{n-1}{n} + \ln\dfrac{n}{n+1}$,

soit $S_n = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ldots + \ln(n-1) - \ln n + \ln n - \ln(n+1)$.

Tous les termes intermédiaires disparaissent ; on a donc $S_n = -\ln(n+1)$ qui tend évidemment vers $-\infty$.

Exercice 2 (4 points)

On fait un arbre qui donne toutes les réponses immédiatement :



1. a. Pour avoir une boule noire il faut calculer la probabilité d'avoir tiré 1 avec le dé et une noire dans U_1, etc., soit sous forme de probabilité conditionnelle :

$$p(N) = p[(A \cap N) \cup (B \cap N) \cup (C \cap N)] = p(A)p_{U_1}(N) + p(B)p_{U_2}(N) + p(C)p_{U_3}(N).$$

Ceci donne évidemment $p(N) = \frac{1}{6}.\frac{3}{k} + \frac{2}{6}.\frac{2}{k} + \frac{3}{6}.\frac{1}{k} = \frac{10}{6k} = \frac{5}{3k}$.

b. On cherche ici $P_N(dé = 1) = \frac{p(A \cap N)}{p(N)} = \frac{1/2k}{5/3k} = \frac{3}{10}$.

c. $\frac{5}{3k} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3k < 10 \Leftrightarrow k < \frac{10}{3}$; comme k est entier et supérieur ou égal à 3, il reste $k = 3$.

d. $\frac{5}{3k} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow 3k = 150 \Leftrightarrow k = 50$.

2. Le nombre de fois où on tire une boule noire sur les 20 parties suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{1}{30}$. La probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire est donc

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{20}{0}\left(\frac{1}{30}\right)^0\left(\frac{29}{30}\right)^{20} = 1 - \left(\frac{29}{30}\right)^{20} \approx 0,492.$$

Exercice 3 (8 points)

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$.

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
φ'		$-$	0	$+$	0	$-$			
φ	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$3/e - 1$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

1. a. En $-\infty$ la fonction se comporte comme $x^n e^x$ en $+\infty$, sa limite est donc $+\infty$. En $+\infty$ elle se comporte comme $x^n e^x$ en $-\infty$ ce qui donne $0 - 1 = 0$.

b. $\varphi'(x) = (2x+1)e^{-x} - (x^2 + x + 1)e^{-x} = (x - x^2)e^{-x} = x(1-x)e^{-x}$. On fait éventuellement un tableau de signes pour $x(1 - x)$ ou on se rappelle du signe du trinôme ; l'exponentielle est toujours > 0.

2. La fonction φ s'annule évidemment en 0 et comme $\varphi(0) = 0$ elle reste positive de $-\infty$ jusqu'à 1. De 1 à $+\infty$ elle est continue, monotone strictement décroissante vers $\left[-1 ; \frac{3}{e} - 1\right]$; comme $\frac{3}{e} - 1 > 0$, 0 appartient à l'intervalle image φ s'annule donc bien sur $[1 ; +\infty[$.

A la calculatrice on trouve $\varphi(1,78) \approx 0,003$ et $\varphi(1,79) \approx -0,0008$.

3. On a dit que φ était positive jusqu'à 1 ; après comme φ est décroissante, si $x \leq \alpha$ alors $\varphi(x) \geq \varphi(\alpha) = 0$ et si $x \geq \alpha$, $\varphi(x) \leq \varphi(\alpha) = 0$.

Partie B : Etude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire.

$f(x)=(2x+1)e^{-x}$ et $g(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

1. Même tangente = passent par le même point A et en cet endroit ont même nombre dérivé. Il faut donc calculer f' et g'. Il est immédiat que $f(0) = g(0) = 1$

$f'(x)=2e^{-x}-(2x+1)e^{-x}=(2x+1)e^{-x} \Rightarrow f'(0)=1$; $g'(x)=\dfrac{2(x^2+x+1)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \Rightarrow g'(0)=1$.

2. a. $f(x)-g(x)=(2x+1)e^{-x}-\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}=(2x+1)\left(e^{-x}-\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)=\dfrac{(2x+1)[(x^2+x+1)e^{-x}-1]}{x^2+x+1}$.

b. Par rapport au signe de φ il faut faire intervenir celui de $2x+1$ et celui de x^2+x+1 ; or ce trinôme à un discriminant négatif, il est toujours du signe de 1, soit > 0.

c. Lorsque $f-g$ est positive, C_f est au dessus de C_g, c'est donc lorsque $x\in\left[-\dfrac{1}{2};\alpha\right]$. Ailleurs C_f est en-dessous de C_g.

x	$-\infty$		$-1/2$		0		α		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$			
$\varphi(x)$					0			$-$	

3. a. $h'(x)=-2e^{-x}-(-2x-3)e^{-x}-\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}=(2x+1)e^{-x}-\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}=f(x)-g(x)$.

N'oubliez pas que la dérivée de $\ln u$ est u'/u...

b. Attention quand même au signe : sur $\left[-\dfrac{1}{2};0\right]$ on a bien $f(x)$ supérieur à $g(x)$, on calcule donc simplement

$\int_{-1/2}^{0} f(x)-g(x)dx=[\,h(x)\,]_{-1/2}^{0}=h(0)-h(-1/2)=-3+2\sqrt{e}+\ln(3/4)\approx 0{,}0098$ en unités d'aire.

Exercice 4 (5 points,)

A. 1. $z^2-2z+4=0$: $\Delta=-12=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$ d'où $z'=\dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$, $z''=\dfrac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$.

Pour la forme expo. inutile de chercher midi à quatorze heures : on sait que $e^{i\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, on a donc immédiatement $z'=2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$; z'' est le conjugué de z', donc $z''=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2. Faire $(z')^{2004}$ en terme d'angle revient à tourner 2004 fois de $\pi/3$ sur le cerlce trigo ; or 2004 = 3x66, on fait donc 668 demi-tours ou encore 334 tours complets. On revient donc au point de départ qui est 1. Au final $(z')^{2004}=2^{2004}e^{i0}=2^{2004}$.

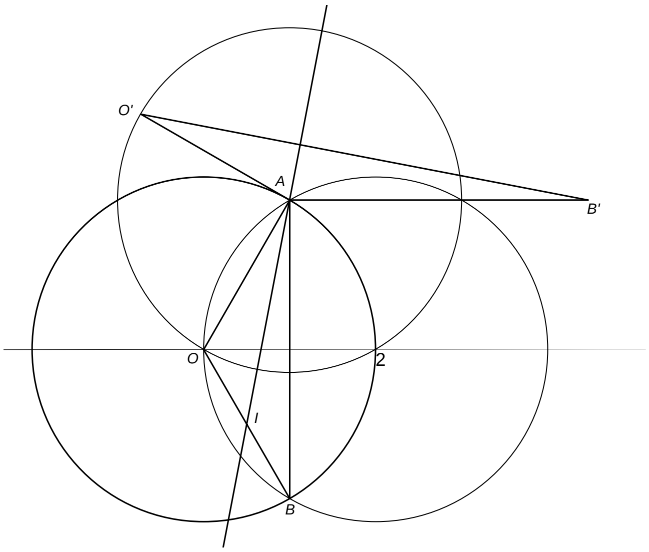
B. 1. Avec la forme exponentielle les deux racines ayant même module 2, elles sont sur le cercle de centre o de rayon2.

2. On rappelle que $r_{(\Omega,\alpha)} : z \to z' / z' - \omega = e^{i\alpha}(z-\omega)$; appliquons ici (on se rappelle que $e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i$) :

$$z_{O'} - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(0 - z_A) \Leftrightarrow z_{O'} = 1 + i\sqrt{3} - i(-1 - i\sqrt{3}) = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3}) \ ;$$

$$z_{B'} - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A) \Leftrightarrow z_{B'} = 1 + i\sqrt{3} + i(1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}) = (1+2\sqrt{3}) + i\sqrt{3} \ .$$

3. a. I a pour affixe $z_I = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Il semblerait que (AI) soit une hauteur du triangle ($AO'B'$).



b. & c. Pour le montrer il suffit de vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{O'B'}$ sont orthogonaux, soit avec le produit scalaire soit avec l'argument. Nous faisons les deux.

$$z_{\overrightarrow{AI}} = 1 + i\sqrt{3} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} \ , \ z_{\overrightarrow{O'B'}} = 1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3} - (1-\sqrt{3}) - i(1+\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - i \ .$$

Avec le p.s. : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{O'B'} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$;

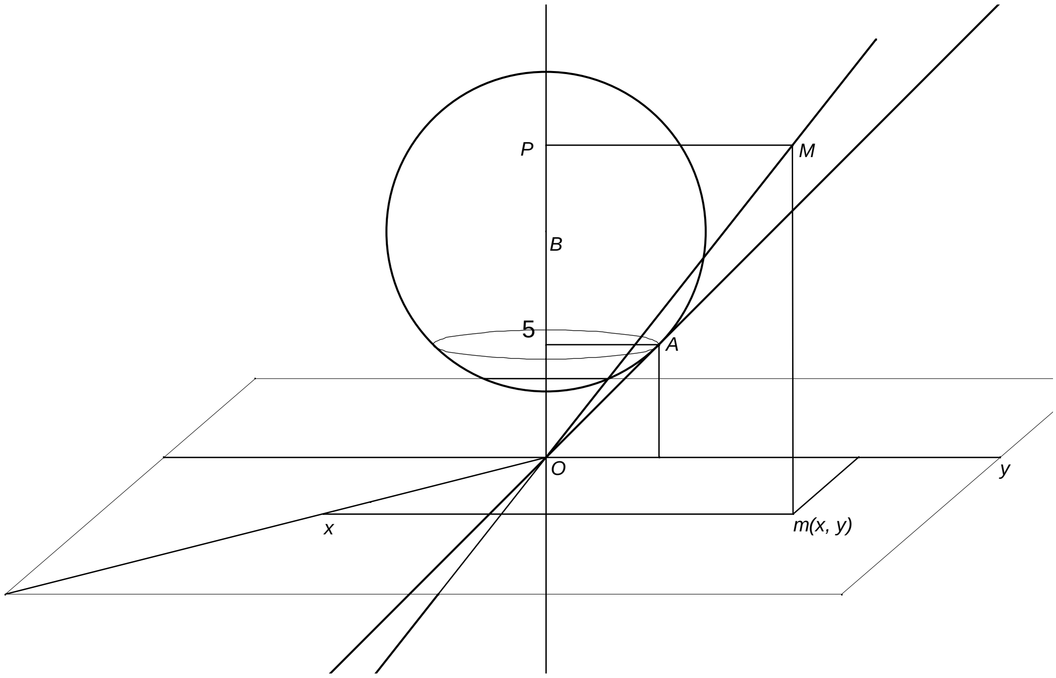
avec l'argument :

$$\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{O'B'}\right) = \arg \frac{3\sqrt{3} - i}{\frac{1}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \arg 2\frac{3\sqrt{3} - i}{1 + i3\sqrt{3}} = \arg 2\frac{(3\sqrt{3} - i)i}{(1 + i3\sqrt{3})i} = \arg 2i\frac{3\sqrt{3} - i}{i - 3\sqrt{3}} = \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2} \ .$$

Exercice 4 (5 points, Tle C)

$A(0\,;5\,;5)$; $B(0\,;0\,;10)$.

Il vaut mieux se faire un petit schéma pour voir ce qui se passe.



1. La droite (OA) est tangente à (C) si (AB) est orthogonale à (OA) : Pythagore ou le p.s. Avec Pythagore : $AB^2 = 0^2 + 5^2 + 5^2 = 50$, $OB^2 = 100$ et $OA^2 = 5^2 + 5^2 = 50$. Pas de problème.

2. a. (Γ) est défini alors comme l'ensemble des points de l'espace tels que le triangle OMP soit rectangle ; par ailleurs avec Thalès on a :

$$\frac{MP}{5} = \frac{OM}{5\sqrt{2}} = \frac{OP}{5} \Rightarrow 2MP^2 = OM^2 \Leftrightarrow 2Om^2 = 0M^2 \Leftrightarrow 2(x^2+y^2) = x^2+y^2+z^2 \text{ d'où } x^2+y^2 = z^2.$$

b. Comme les génératrices du cône sont tangentes à la sphère elles passent toutes par un point du cercle horizontal de centre (0 ; 0 ; 5) et de rayon 5. On peut le faire analytiquement :

(S) a pour équation : $x^2+y^2+(z-10)^2 = 50$ d'où en intersectant avec le cône : $\begin{cases} x^2+y^2 = z^2 \\ z^2+(z-10)^2 = 50 \end{cases}$.

La deuxième équation donne $2z^2 - 20z + 50 = 0$, soit $z^2 - 10z + 25 = 0 \Leftrightarrow (z-5)^2 = 0 \Leftrightarrow z = 5$.

Notre intersection est donc caractérisée par $\begin{cases} x^2+y^2 = 25 \\ z = 5 \end{cases}$.

La première équation donne un cercle d'un plan horizontal, la deuxième l'altitude de ce plan.

3. Le plan $x = 1$ est un plan vertical parallèle à $(O\,;\vec{j},\vec{k})$; son intersection avec le cône ne sera sûrement pas un cercle. Faisons $x = 1$ dans l'équation du cône : $1+y^2 = z^2$, ce qui donne $z = \pm\sqrt{1+y^2}$, soit des hyperboles (tracez à la calculatrice pour voir).

4. Supposons que x et y soient simultanément impairs : on a $x = 2p+1, y = 2q+1$ d'où en remplaçant :

$$4p^2+4p+1+4q^2+4q+1 = z^2 \Leftrightarrow z^2 = 4(p^2+p+q^2+q)+2 \Leftrightarrow z^2 \equiv 2(4).$$

Est-il possible de trouver un nombre qui élevé au carré donne un reste de 2 modulo 4 ? Si ce nombre est pair son carré sera congru à 0 modulo 4, s'il est impair ce sera à 1 modulo 4 ; x et y ne peuvent donc être impairs ensemble.

" Trois choses donnent la mesure de l'homme : la richesse, le pouvoir, l'adversité. "

SUJET 2

Exercice 1 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Exercice 2 (5 points, Tle c)

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1}) = x^k - 1 \ .$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. a. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$. Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

b. Déduire de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.

a. On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bézout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que $mu - nv = d$.

b. On suppose u et v strictement positifs. Montrer que $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$. Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le PGCD de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.

c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le PGCD de $2^{63} - 1$ et de $2^{60} - 1$.

Exercice 2 (5 points,)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $(1+i)^6 = -8i$.

2. On considère l'équation (E) : $z^2 = -8i$.

a. Déduire de 1. une solution de l'équation (E).

b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.

3. Déduire également de 1. une solution de (E') : $z^3 = -8i$.

4. On considère le point A d'affixe $2i$ et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a. Déterminer l'affixe b du point B, image de A par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r.

b. Montrer que b et c sont solutions de (E').

5. a. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm), représenter les points A, B et C.

b. Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?

c. Déterminer le centre de gravité de cette figure.

Exercice 3 (5 points) (concours d'entrée à l'ENS Yaoundé)

Pour chaque question une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte enlève 1/2 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne le point $S(1\,;-2\,;0)$ et le plan P d'équation $x+y-3z+4=0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point S et perpendiculaire au plan P est :

A : $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=-3 \end{cases}$ B : $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=1-3t \end{cases}$ C : $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \\ z=3t \end{cases}$ D : $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \end{cases}$ (t réel).

2. Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P sont :

A : $(-4\,;0\,;0)$ B : $\left(\frac{6}{5}\,;\frac{-9}{5}\,;\frac{-3}{5}\right)$ C : $\left(\frac{7}{9}\,;\frac{-2}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$ D : $\left(\frac{8}{11}\,;\frac{-25}{11}\,;\frac{9}{11}\right)$

3. La distance du point S au plan P est égale à :

A : $\frac{\sqrt{11}}{3}$ B : $\frac{3}{\sqrt{11}}$ C : $\frac{9}{\sqrt{11}}$ D : $\frac{9}{11}$

4. On considère la sphère de centre S et de rayon 3. L'intersection de la sphère S et du plan P est égale :

A : au point $I(1\,;-5\,;0)$. B : au cercle de centre H et de rayon $r=3\sqrt{\frac{10}{11}}$.

C : au cercle de centre S et de rayon 2. D : au cercle de centre H et de rayon $r=\frac{3\sqrt{10}}{11}$.

Exercice 4 (6 points)

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est $p([0\,;t[)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$. Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0\,;200[)=0,5$.

1. Montrer que $\lambda=\frac{\ln 2}{200}$.

2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.

3. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}dx$.

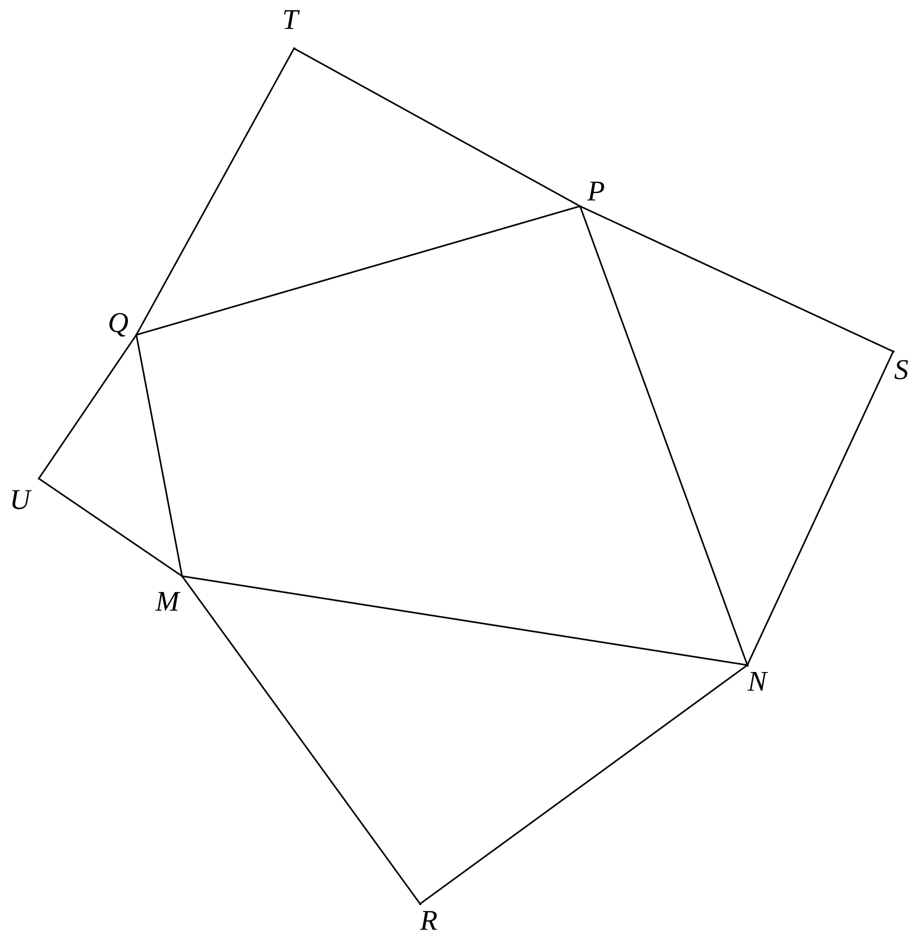
a. Montrer que $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}dx=\frac{-\lambda A e^{-\lambda A}-e^{-\lambda A}+1}{\lambda}$.

b. En déduire d_m ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

ANNEXE

À rendre avec la copie

Figure de l'exercice 2 de spécialité



" La glaise ne devient terre à mouler qu'après avoir été pétrie. "

LE CORRIGE DU SUJET 2

Inscrivez –vous au groupe al Kashi ou acheter le livre

Sujet 3

Exercice 1 (4 points)

4 points

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $p(X > 10) = 0{,}286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,125.

On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.

2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

Exercice 2 (5 points,)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 1 cm.

1. On désigne par A, B et I les points d'affixes respectives : $z_A = 3 + 2i$, $z_B = -3$ et $z_I = 1 - 2i$.

a. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

b. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z = \dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$. Que peut-on en déduire sur la nature du triangle IAB ?

c. Calculer l'affixe z_C du point C image de I par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

d. Soit D le barycentre du système $\{(A, 1)\,;(B, -1)\,;(C, 1)\}$; calculer l'affixe z_D du point D.

e. Montrer que $ABCD$ est un carré.

2. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|.$$

3. On considère l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}$.

a. Montrer que B appartient à Γ_2.

b. Déterminer et construire l'ensemble Γ_2.

Exercice 2 (5 points, Tle C)

Le plan P est rapporté a un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 3 cm.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que

$$a=3,\ b=1+\frac{2}{3}i,\ c=3i \text{ et } d=-\frac{1}{3}i.$$

1. Représenter les points A, B, C et D.
2. Déterminer l'angle α et le rapport k de la similitude directe s transformant A en B et C en D.
3. Donner l'écriture complexe de s. En déduire l'affixe du centre I de s.
4. Soit M le point de coordonnées $(x\,;y)$ et $M'(x'\,;y')$ son image par s.

Montrer que : $\begin{cases} x'=-\frac{1}{3}x+1 \\ y'=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3} \end{cases}$.

5. On construit une suite (M_n) de points du plan en posant $\begin{cases} M_0=A \\ M_{n+1}=s(M_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

On note z_n l'affixe du point M_n et on pose $r_n=|z_n-1|$.

a. Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que $IM_k\leq 10^{-3}$.

Exercice 3 (7 points)

1. Pour tout réel k positif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x)=x+\frac{1-ke^x}{1+ke^x}$.

a. Justifier que, pour rout réel k positif ou nul, la fonction f_k est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : 2y' = (y-x)^2+1.$$

b. En déduire le sens de variations de f_k sur $\mathbb{R}$.

2. On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Sur l'annexe, on a représenté la droite D d'équation $y = x - 1$, la droite D' d'équation $y = x+1$ et plusieurs courbes C_k correspondant à des valeurs particulières de k.
Déterminer le réel k associé à la courbe C passant par le point O puis celui associé à la courbe C' passant par le point A de coordonnées (1 ; 1).

3. On remarque que, pour tout x réel, on a : $f_k(x)=x-1+\frac{2}{1+ke^x}$ (**1**) et $f_k(x)=x+1-\frac{2ke^x}{1+ke^x}$ (**2**).

En déduire pour tout k strictement positif :
- la position de la courbe C_k par rapport aux droites D et D' ;
- les asymptotes de la courbe C_k.

4. Cas particulier : $k = 1$.

a. Justifier que f_1 est impaire.

b. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_0^x f_1(t)dt$. Interpréter graphiquement le réel $F(x)$ dans les deux cas : $x>0$ et $x<0$. Déterminer alors la parité de F à l'aide d'une interprétation graphique.

c. Déterminer les variations de F sur $\mathbb{R}$.

d. En utilisant l'égalité (**2**), calculer explicitement $F(x)$.

Exercice 4 (5 points)

On considère la suite (I_n), $n \in \mathbb{N}$, définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t}\,dt$.

1. a. Déterminer le sens de variation de cette suite.
b. Montrer que (I_n), est une suite positive.

c. Montrer que pour tout $t \in [0\,;1]$ on a $\frac{e^{-t^2}}{1+n+t} \leq \frac{1}{1+n}$ et en déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Que peut-on en conclure quant à la convergence de (I_n) ?

2. On considère f et g deux fonctions définies sur $[0\,;1]$ par : $f(x) = e^{-x} + x - 1$ et $g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$.

a. Étudier le sens de variation et le signe de f.
b. En déduire le sens de variation de g sur $[0\,;1]$.

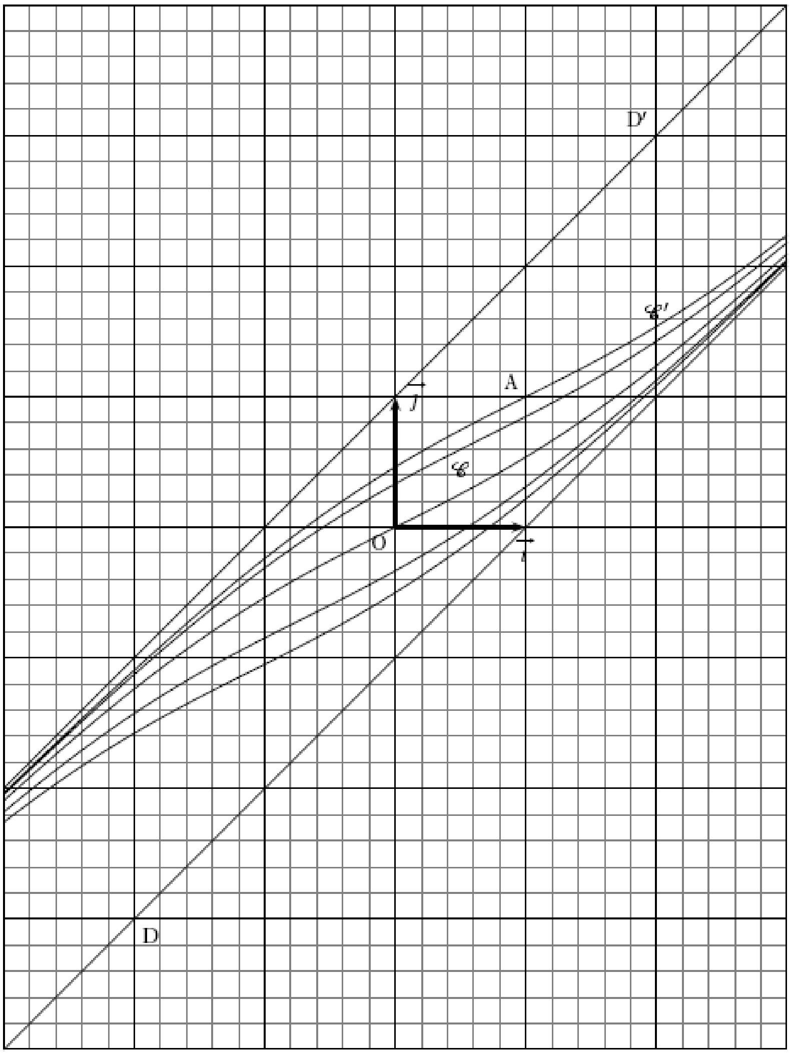
c. Établir, pour tout x appartenant à $[0\,;1]$, l'encadrement : $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$.

d. En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout t appartenant à $[0\,;1]$.

e. Établir l'encadrement : $\frac{2}{3(n+2)} \leq I_n \leq \frac{23}{30(n+1)}$.

f. Donner une valeur de p telle que $I_p \leq 10^{-2}$.

Annexe



« L'homme est un apprenti, la douleur est son maître ».

Quatrième sujet

Exercice 1 (4 points)

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle [0 ; +∞ [par $f(x)=1-x^2e^{1-x^2}$.

Son tableau de variations est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	1	↘	0	↗	1

Sa courbe représentative C et son asymptote Δ, d'équation $y = 1$, sont tracées en annexe, à rendre avec la copie.

A -Lecture graphique

1. k est un nombre réel donné. En utilisant la représentation graphique, préciser en fonction de k le nombre de solutions dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation $f(x) = k$.

2. n étant un entier naturel non nul, déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes.

B - Définition et étude de deux suites

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet deux solutions u_n et v_n respectivement comprises dans les intervalles $[0\ ;\ 1]$ et $[1\ ;\ +\infty[$.

2. Sur la feuille en annexe, construire sur l'axe des abscisses les réels u_n et w_n pour n appartenant à l'ensemble $\{2\ ;\ 3\ ;4\}$.

3. Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. Procéder de même pour la suite (v_n). En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 2 (5 points,)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$; i désigne le nombre complexe demodule 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Soient les points A, B et C d'affixes respectives i, $1+i$ et $-1+i$.

Soit f l'application qui, à tout point M du plan différent de A, d'affixe z, associe le point M' du plan d'affixe z' tel que : $z'=\frac{iz+2}{z-i}$.

1. a. Déterminer les images de B et de C par l'application f.

b. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, on a la relation $(z'-i)(z-i)=1$.

c. Soit D le point d'affixe $1+2i$. Placer les points A, B, C et D sur une figure (unité graphique 4 cm). Déduire de la question précédente une construction du point D' image du point D par l' application f.

2. Soit R un nombre réel strictement positif. Quelle est l'image par l'application f du cercle de centre A et de rayon R ?

3. a. Montrer que, si l'affixe du point M est un imaginaire pur différent de i, alors l'affixe du point M' est un imaginaire pur. Que signifie ce résultat pour l'image par l'application f de l'axe imaginaire privé du point A ?

b. Soit Δ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Déterminer l' image de la droite Δ privée du point A par l'application f.

Exercice 2 (5 points,)

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

« soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p ; alors $a^{p-1}-1$ est divisible par p ».

1. Soit p un nombre premier impair.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que $2^k \equiv 1(p)$.

b. Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1(p)$ et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n, alors $2^n \equiv 1(p)$.

c. Soit b tel que $2^b \equiv 1(p)$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n \equiv 1(p)$, alors b divise n.

2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$. On prend pour p un facteur premier de A.

a. Justifier que : $2^q \equiv 1(p)$.

b. Montrer que p est impair.

c. Soit b tel que $2^b \equiv 1(p)$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant 1. que b divise q. En déduire que $b = q$.

d. Montrer que q divise $p-1$, puis montrer que $p \equiv 1(2q)$.

3. Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m+1$, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que A_1 est premier.

Exercice 4 (5 points)

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève un demi-point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Première partie

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :

B_1, contenant 6 000 adresses, dont 120 sont erronées et 5 880 sont exactes,

B_2, contenant 4 000 adresses, dont 200 sont erronées et 3 800 sont exactes.

1. On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de B_1. La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

A : $\dfrac{\binom{120}{3}+\binom{5880}{7}}{\binom{6000}{10}}$	**B** : $\dfrac{3}{120}$	**C** : $\binom{10}{3}\times\left(\dfrac{120}{6000}\right)^3\times\left(\dfrac{5880}{6000}\right)^7$	**D** : $\binom{10}{3}\times\left(\dfrac{3}{120}\right)^3\times\left(\dfrac{7}{5880}\right)^7$

2. Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B_1 est :

A : 0,98	**B** : $\dfrac{0,4\times0,95}{0,6\times0,98+0,6\times0,02}$	**C** : $0,6\times0,98$	**D** : $\dfrac{0,6\times0,98}{0,6\times0,98+0,4\times0,95}$

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot ménager jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ (loi exponentielle de paramètre λ = 0,0005).

Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant *t* est : $p([0\,;t[)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$.

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

A : $e^{-\frac{2\,500}{2\,000}}$	**B** : $e^{\frac{5}{4}}$	**C** : $1-e^{-\frac{2\,500}{2\,000}}$	**D** : $e^{-\frac{2\,000}{2\,500}}$

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule $E=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}dx$.

a. L'intégrale $\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}dx$ est égale à :

A : $\lambda\frac{t^2}{2}e^{-\lambda t}$	**B** : $-te^{-\lambda t}-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}$	**C** : $\lambda te^{-\lambda t}-\lambda e^{-\lambda t}-\lambda$	**D** : $te^{-\lambda t}-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}$

b. La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

A : 3 500	**B** : 2 000	**C** : 2531,24	**D** : 3 000

Exercice 4 (6 points)

On désigne par *f* une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par *f'* sa fonction dérivée. Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

(1) Pour tout nombre réel *x*, $(f'(x))^2-(f(x))^2=1$.

(2) $f'(0)=1$

(3) La fonction *f'* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. a. Démontrer que, pour tout nombre réel *x*, $f'(x)\neq 0$.

b. Calculer *f*(0).

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :

(4) Pour tout nombre réel *x*, $f''(x)=f(x)$.

où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction *f*.

3. On pose $u=f'+f$ et $v=f'-f$.

a. Calculer *u*(0) et *v*(0).

b. Démontrer que $u'=u$ et $v'=-v$.

c. En déduire les fonctions *u* et *v*.

d. En déduire que, pour tout réel *x*, $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

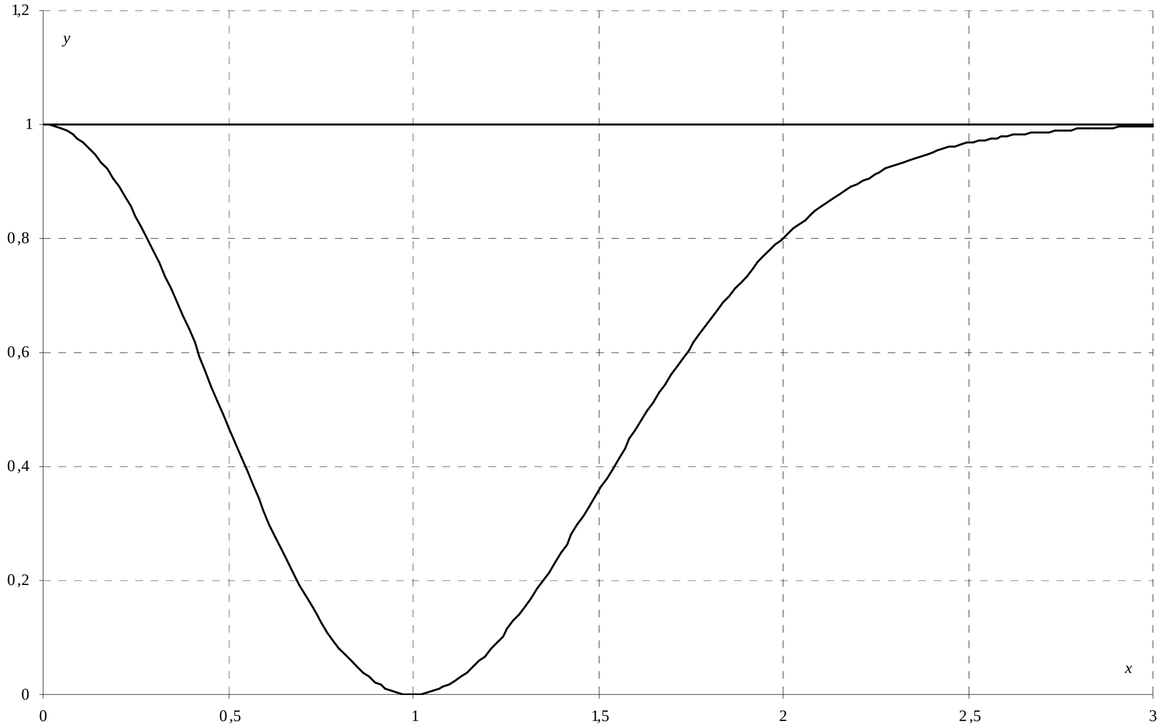
4. a. Etudier les limites de la fonction *f* en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction *f*.

5. a. Soit *m* un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x)=m$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b. Déterminer cette solution lorsque *m* = 3 (on en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale à 10^{-2} près).

Annexe : courbe de l'exercice 1.



" Il n'y a rien de si infortuné qu'un homme qui n'a jamais souffert »

Cinquième sujet

Exercice 1 (7 points)

Soit la fonction *f* définie par $f(x)=xe^{-x}$ sur $[0\,;+\infty[$.

On note Γ la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 10 cm).

Partie A

1. a. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

b. Etudier les variations de *f* et dresser son tableau de variations.

c. construire Γ.

2. a. Montrer que pour tout réel *m* de l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$, l'équation $f(x)=m$ admet deux solutions.

b. Dans le cas où $m=\frac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions, (avec $\alpha<\beta$). Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

c. Résoudre l'équation $f(x)=m$ dans le cas où *m* = 0 et $m=\frac{1}{e}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=\alpha \\ u_{n+1}=u_ne^{-u_n}\end{cases}$ où α est le réel défini à la question A. 2. b.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $u_n>0$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

2. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n=\ln u_n$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a $u_n=w_n-w_{n+1}$.

b. On pose $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$. Montrer que $S_n=w_0-w_{n+1}$.

c. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme v_0, $v_0>0$, et pour tout entier *n*, par $v_{n+1}=v_ne^{-v_n}$. Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout entier $n\geq 1$, on ait $u_n=v_n$? Si oui, préciser laquelle.

Exercice 2 (3 points)

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative de la fonction *f*, dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle

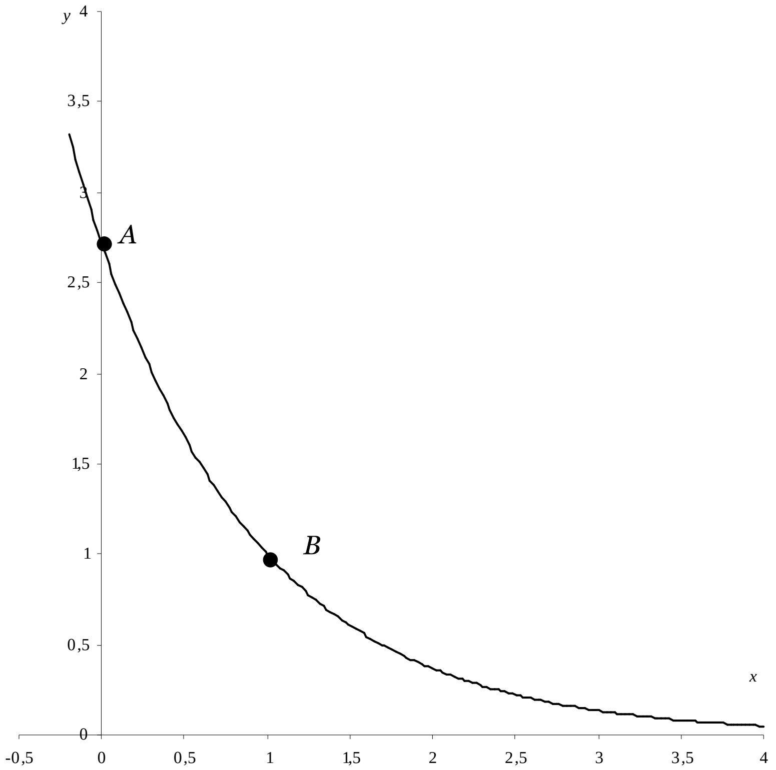
$$\text{(E)}\quad y'+y=0 \quad \text{et telle que } y(0)=e.$$

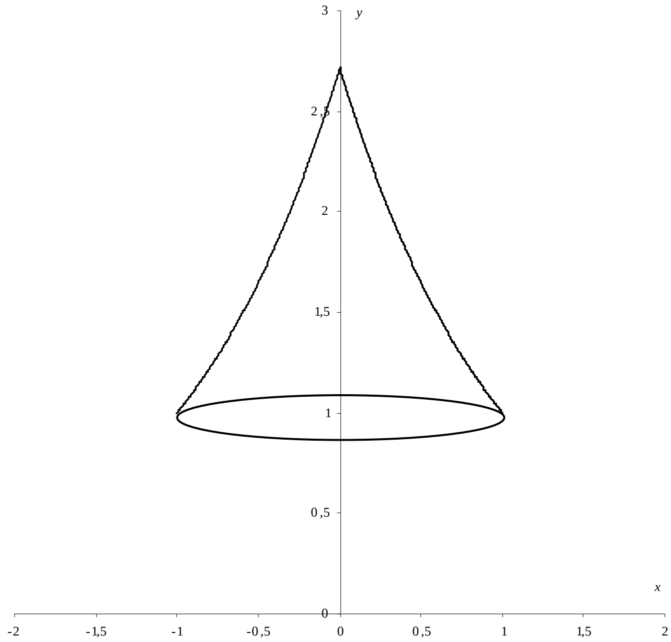
1. Déterminer *f*(*x*) pour tout *x* réel.

2. Soit *t* un réel donné de l'intervalle [1 ; *e*]. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{1-x}=t$ d'inconnue *x*.

3. Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe. On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe $\overset{\frown}{AB}$ comme représenté sur la deuxième figure. On note V son volume et on admet que $V = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 \, dt$.

Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.





Exercice 3 (5 points,)

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage de deux boules simultanément de l'urne.

On note A_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire » ;

on note A_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire » ;

on note A_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires ».

Montrer que $p(A_0)=\frac{6}{15}$ et $p(A_1)=\frac{8}{15}$; en déduire $p(A_2)$.

2. Après ce premier tirage, il reste 4 boules dans l'urne. On effectue à nouveau un tirage sans remise de deux boules de l'urne.

On note B_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n°2 » ;

on note B_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire au tirage n°2 » ;

on note B_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires au tirage n°2 ».

a. Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$, $p_{A_2}(B_0)$.

b. Calculer $p(B_0)$.

c. Calculer $p(B_1)$ et $p(B_2)$.

d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier tirage ?

3. On considère l'événement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient tirées de l'urne ». Montrer que $p(R)=\frac{1}{3}$.

Exercice 4 (5 points,)

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Pour réaliser la figure, on prendra pour unité graphique 1 cm.

Soit *P* le point d'affixe *p* où *p* = 10 et Γ le cercle de diamètre [*OP*]. On désigne par Ω le centre de Γ.

Soit *A*, *B* et *C* les points d'affixes respectives *a*, *b* et *c* où $a=5+5i$, $b=1+3i$ et $c=8-4i$.

1. Montrer que *A*, *B* et *C* sont des points du cercle Γ.

2. Soit *D* le point d'affixe $2+2i$. Montrer que *D* est le projeté orthogonal de *O* sur la droite (*BC*).

Partie B (On rappelle que $|z|^2 = z\overline{z}$).

A tout point *M* du plan différent de *O*, d'affixe *z*, on associe le point *M'* d'affixe *z'* tel que $z'=\dfrac{20}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ représente le nombre conjugué de *z*.

1. Montrer que les points *O*, *M* et *M'* sont alignés.

2. Soit Δ la droite d'équation *x* = 2 et *M* un point de Δ d'affixe *z*. On se propose de définir géométriquement le point *M'* associé au point *M*.

a. Vérifiez que $z+\overline{z}=4$.

b. Exprimez $z'+\overline{z}'$ en fonction de *z* et $\overline{z}$ et en déduire que $5(z'+\overline{z}')=z'\overline{z}'$.

c. En déduire que *M'* appartient à l'intersection de la droite (*OM*) et du cercle Γ. Placer *M'* sur la figure.

" L'infortune est la sage-femme du génie. "

Correction de la cinquième épreuve

Correction sujet 5 Inscrivez –vous au groupe al Kashi ou acheter le livre

SIXIEME EPREUVE

Exercice 1 (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère l'application *f* du plan dans lui-même qui, à tout point *M* d'affixe *z* associe le point *M'* d'affixe *z'* telle que :

$$z'=z^2-4z\,.$$

1. Soient *A* et *B* les points d'affixes $z_A=1-i$ et $z_B=3+i$.

a. Calculer les affixes des points *A'* et *B'* images des points *A* et *B* par *f*.

b. On suppose que deux points ont la même image par *f*. Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2. Soit *I* le point d'affixe −3.

a. Démontrer que *OMIM'* est un parallélogramme si et seulement si $z^2-3z+3=0$.

b. Résoudre l'équation $z^2-3z+3=0$.

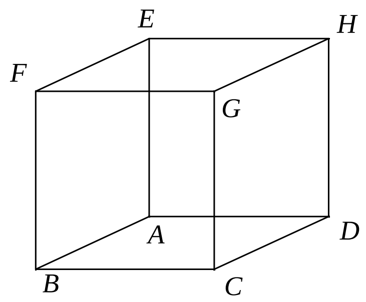
3. a. Exprimer $(z'+4)$ en fonction de $(z-2)$. En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$ puis entre $\arg(z'+4)$ et $\arg(z-2)$.

b. On considère les points *J* et *K* d'affixes respectives $z_J=2$ et $z_K=-4$. Démontrer que tous les points *M* du cercle (C) de centre *J* et de rayon 2 ont leur image *M'* sur un cercle que l'on déterminera.

c. Soit E le point d'affixe $z_E = -4 - 3i$. Donner la forme trigonométrique de $z_E + 4$ et démontrer à l'aide du 3. a. qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E. Préciser sous forme algébrique les affixes de ces deux points.

Exercice 2 (5 points Tle c)

Cet exercice est un Q.C.M. Pour chacune des cinq questions une ou plusieurs réponses sont exactes.
Le candidat doit inscrire V (vrai) ou F (faux) dans la case correspondante.
Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question 3 réponses correctes rapportent 1 point, 2 réponses correctes rapportent 0,5 point.



Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté 1. On choisit le repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. On appelle I et J les milieux respectifs des segments [EF] et [FG]. L est le barycentre de {(A ; 1), (B ; 3)}. Soit (P) le plan d'équation $4x - 4y + 3z - 3 = 0$.

1. Les coordonnées de L sont :

Propositions	a. $\left(\frac{1}{3}\,;0\,;0\right)$	b. $\left(\frac{3}{4}\,;0\,;0\right)$	c. $\left(\frac{2}{3}\,;0\,;0\right)$
Réponses			

2. Le plan (P) est le plan :

Propositions	a. (GLE)	b. (LEJ)	c. (GFA)
Réponses			

3. Le plan parallèle au plan (P) passant par I coupe la droite (FB) en M de coordonnées :

Propositions	a. $\left(1\,;0\,;\frac{1}{4}\right)$	b. $\left(1\,;0\,;\frac{1}{5}\right)$	c. $\left(1\,;0\,;\frac{1}{3}\right)$
Réponses			

4.

Propositions	a. Les droites (EL) et (FB) sont sécantes en un point N qui est le symétrique de M par rapport à B.	b. Les droites (EL) et (IM) sont parallèles.	c. b. Les droites (EL) et (IM) sont sécantes.
Réponses			

5. Le volume du tétraèdre *FIJM* est :

Propositions	a. $\frac{1}{36}$	b. $\frac{1}{48}$	c. $\frac{1}{24}$
Réponses			

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x - x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x - x - 1$.

1. Etudier les variations de la fonction *g* sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de *g*.
2. Justifier que pour tout *x*, $e^x - x > 0$.

Partie B

1. a. Calculer les limites de la fonction *f* en $+\infty$ et $-\infty$.
b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. a. Calculer $f'(x)$, *f'* désignant la fonction dérivée de *f*.
b. Etudier le sens de variation de *f* puis dresser son tableau de variation.
3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
b. A l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).
4. Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe (C).

Exercice 4 (5 points,)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel *n*, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}.$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2, v_2.
2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel *n* par $w_n = v_n - u_n$.
a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
b. Exprimer w_n en fonction de *n* et préciser la limite de la suite (w_n).
3. Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel *n*, par $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.
a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.
b. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 4 (5 points, Tle c)

Dans cet exercice a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. a. Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=1$ alors les nombres a et b sont premiers entre eux.

b. En déduire que si $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$ alors a et b sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer tous les couples d'entiers strictement positifs (a ; b) tels que $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$. Un tel couple sera appelé solution.

a. Déterminer a lorsque $a = b$.

b. Vérifier que (1 ; 1), (2 ; 3) et (5 ; 8) sont trois solutions particulières.

c. Montrer que si (a ; b) est solution et si $a<b$, alors $a^2-b^2<0$.

3. a. Montrer que si (x ; y) est une solution différente de (1 ; 1) alors $(y-x\,;\,x)$ et $(y\,;\,y+x)$ sont aussi des solutions.

b. Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0=a_1=1$ et pour tout entier n, $n\geq 0$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n\geq 0$, $(a_n\,;\,a_{n+1})$ est solution. En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

C'est une loi: souffrir pour comprendre. "

Correction de la sixième épreuve :

Exercice 1 (5 points)

$z'=z^2-4z$.

1. a. $z_A=1-i\rightarrow z_{A'}=(1-i)^2-4(1-i)=-2i-4+4i=-4+2i$ et $z_B=3+i\rightarrow z_{B'}=9+6i-1-12-4i=-4+2i$.

b. appelons u et v les affixes des points U et V en question : $u'=u^2-4u$ et $v'=v^2-4v$; leurs images sont identiques si

$$u'=v'\Leftrightarrow u^2-4u=v^2-4v\Leftrightarrow u^2-v^2-4u+4v=0\Leftrightarrow(u-v)(u+v)-4(u-v)=0\Leftrightarrow(u-v)(u+v-4)=0.$$

On a donc soit $u=v$, soit $u+v=4\Leftrightarrow\dfrac{u+v}{2}=2$, et dans ce cas le milieu de [UV] a pour affixe 2 et l'un est l'image de l'autre par la symétrie de centre 2.

2. a. $I(-3)$. $OMIM'$ est un parallélogramme si et seulement si

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{M'I} \Leftrightarrow z-0=-3-z' \Leftrightarrow z'+z+3=0 \Leftrightarrow z^2-3z+3=0.$$

b. $z^2-3z+3=0$: $\Delta=9-12=-3=3i^2$ d'où $z_1=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. a. $(z'+4)=z^2-4z+4=(z-2)^2 \Rightarrow \begin{cases} |z'+4|=|z-2|^2 \\ \arg(z'+4)=2\arg(z-2)+2k\pi \end{cases}$.

b. Soit M un point du cercle (C) de centre $J(2)$ et de rayon 2, son affixe z est telle que $|z-2|=2$, et son image M' est telle que $|z'+4|=2^2=4$ d'où M' est sur le cercle de centre $K(-4)$, de rayon 4.

c. $z_E+4=-3i=3e^{-i\frac{\pi}{2}}$; si E est l'image d'un point z, on a

$$\arg(z_E+4)=2\arg(z-2)+2k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}=2\arg(z-2)+2k\pi \Leftrightarrow \arg(z-2)=-\frac{\pi}{4}-k\pi.$$

Sur le cercle trigo il y a donc deux arguments possibles, $-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$. Il reste à trouver les modules : $|z_E+4||-3i|=3=|z-2|^2 \Rightarrow |z-2|=3$. Conclusion on a $z-2=3e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ou $z-2=3e^{-i\frac{\pi}{4}}$, soit $z=2+3e^{i\frac{3\pi}{4}}=2+3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{4-3\sqrt{2}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ou $z=2+3e^{-i\frac{\pi}{4}}=2+3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{4+3\sqrt{2}}{2}-i\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2 (5 points Tle C)

1. Il n'y a qu'une bonne réponse : **b.** $\left(\frac{3}{4};0;0\right)$. A a pour coordonnées (0 ; 0 ; 0) et B(1 ; 0 ; 0) d'où L a pour coordonnées : $x_L=\frac{1}{3+1}(1.0+3.1)=\frac{3}{4}$ et 0 pour les autres.

2. Le plan (P) est le plan :

Propositions	a. (*GLE*)	b. (*LEJ*)	c. (*GFA*)
Réponses	Vrai	Faux	Faux

C'est un peu pénible car il faut regarder tous les points ; G(1 ; 1 ; 1) donc $4-4+3-3=0$ et G est dans P ; E(0 ; 0 ; 1) est aussi dans P ainsi que L. $J\left(1;\frac{1}{2};1\right)$: $4-2+3-3\neq 0$, F(1 ; 0 ; 1) : $4-0+3-3\neq 0$.

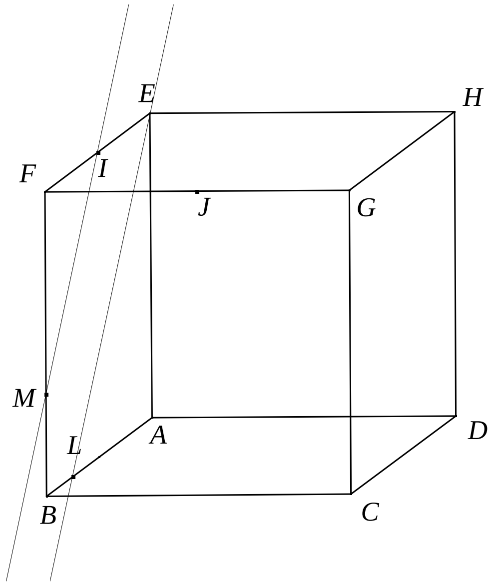
3. Une seule bonne réponse :

Propositions	a. $\left(1;0;\frac{1}{4}\right)$	b. $\left(1;0;\frac{1}{5}\right)$	c. $\left(1;0;\frac{1}{3}\right)$
Réponses	Faux	Faux	Vrai

I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};0;1\right)$; il nous faut l'équation de ce plan :

$$\begin{pmatrix}4\\-4\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1/2\\y-0\\z-1\end{pmatrix}=4x-2-4y+3z-3=0 \Leftrightarrow 4x-4y+3z-5=0.$$

La droite (FB) est facile à trouver : $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$; le point M est donc donné par $4-0+3z-5=0 \Leftrightarrow z=\frac{1}{3}$.



4. Il y a intérêt à placer les points sur la figure… mais ce n'est pas suffisant malheureusement…

Propositions	a. Les droites (EL) et (FB) sont sécantes en un point N qui est le symétrique de M par rapport à B.	b. Les droites (EL) et (IM) sont parallèles.	c. b. Les droites (EL) et (IM) sont sécantes.
Réponses	Vrai	Vrai	Faux

$L\left(\frac{3}{4};0;0\right)$, E(0 ; 0 ; 1), F(1 ; 0 ;1), B(1 ; 0 ; 0), $M\left(1;0:\frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{EL}=\left(\frac{3}{4};0;-1\right)$, $\overrightarrow{FB}=(0;0;-1)$, $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $\overrightarrow{IM}=\left(\frac{1}{2};0;-\frac{2}{3}\right)$.

(EL) a pour équations paramétriques $\begin{cases} x=0+\frac{3}{4}t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}$ et (FB) : $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=1-t' \end{cases}$ d'où leur intersection donnée par

$\begin{cases} \frac{3}{4}t=1 \\ 0=0 \\ 1-t=1-t' \end{cases} \Leftrightarrow t=\frac{4}{3}=t'$. On a donc le point $N\left(1;0;-\frac{1}{3}\right)$; le milieu de [MN] est $B(1;0;0)$.

$$\overrightarrow{EL}=\left(\frac{3}{4};0;-1\right)=k\overrightarrow{IM}=k\left(\frac{1}{2};0;-\frac{2}{3}\right)\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{k}{2}=\frac{3}{4} \\ 0=0 \\ -\frac{2k}{3}=-1 \end{cases}\Rightarrow k=\frac{3}{2}.$$

5.

Propositions	a. $\frac{1}{36}$	b. $\frac{1}{48}$	c. $\frac{1}{24}$
Réponses	Vrai	Faux	Faux

La base est le triangle *FIJ* de surface $\frac{1}{8}$, la hauteur est la longueur *FM*, soit $\frac{2}{3}$, le volume de *FIJM* est donc $\frac{1}{3}.\frac{1}{8}.\frac{2}{3}=\frac{1}{36}$.

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par . On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x-x-1$.

1. $g'(x)=e^x-1$ est positive lorsque $x\geq 0$; $g(0)=1-0-1=0$: comme *g* est décroissante avant 0 et croissante après, *g* est toujours positive.

2. Comme $g(x)\geq 0$, on a $e^x-x\geq 1\Rightarrow e^x-x>0$ (ceci montre que *f* est définie sur $\mathbb{R}$).

Partie B

1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}-1}=\frac{1}{+\infty}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}-1}=\frac{1}{0-1}=-1$.

b. On a une asymptote horizontale en $-\infty$: $y=-1$ et une autre en $+\infty$: $y=0$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

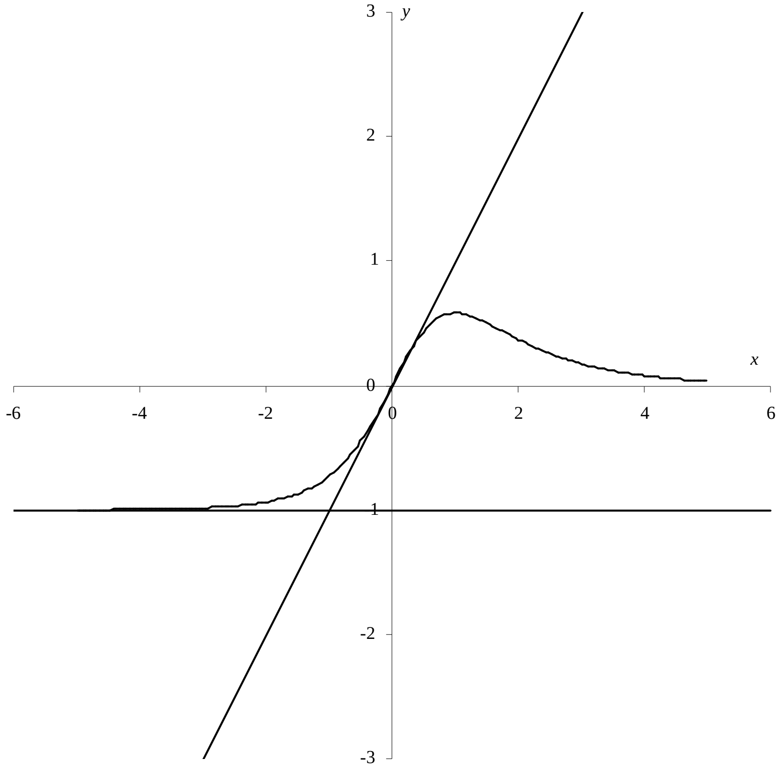
2. a. $f'(x)=\frac{1(e^x-x)-x(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x-x-xe^x+x}{(e^x-x)^2}=\frac{(1-x)e^x}{(e^x-x)^2}$.

b. *f* est du signe de 1−*x*.

3. a. $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x$.

b. $f(x)-x=\frac{x}{e^x-x}-x=\frac{x-xe^x+x^2}{e^x-x}=\frac{-x(e^x-x-1)}{e^x-x}=\frac{-xg(x)}{e^x-x}$. Comme *g* est positive, ainsi que e^x-x, $f(x)-x$ est du signe de −*x*, soit positif avant 0 (C est au-dessus de T), négatif après (C est en dessous de T).

4.



Exercice 4 (5 points,)

$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$.

1. $u_1 = \dfrac{u_0 + v_0}{2} = \dfrac{7}{2}$, $v_1 = \dfrac{u_1 + v_0}{2} = \dfrac{15}{4}$, $u_2 = \dfrac{u_1 + v_1}{2} = \dfrac{29}{8}$, $v_2 = \dfrac{u_2 + v_1}{2} = \dfrac{59}{16}$.

2. a. $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} - \dfrac{u_n + v_n}{2} = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{2} = \dfrac{\dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n}{2} = \dfrac{u_n + v_n - 2u_n}{4} = \dfrac{v_n - u_n}{4} = \dfrac{1}{4} w_n$.

b. $w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 3 = 1$ donc $w_n = 1.\dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1}{4^n}$; sa limite est évidemment 0.

3. On a vu que $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{2} = w_{n+1} > 0$ donc u_n est croissante ; par ailleurs $w_n = v_n - u_n > 0$ donc $u_n > v_n$; enfin $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2} u_{n+1} + \dfrac{1}{2} v_n - v_n = \dfrac{1}{2}(u_{n+1} - v_n) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n) = \dfrac{1}{4}(u_n - v_n) < 0$ donc v_n est décroissante.

Il reste à montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$ or c'est justement la limite de w_n. Les suites (u_n) et (v_n) convergent donc vers la même limite (inconnue pour l'instant…).

4. a. $t_{n+1}=\frac{u_{n+1}+2v_{n+1}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{u_n+v_n}{2}+2\frac{u_{n+1}+v_n}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{u_n+v_n}{2}+\frac{u_n+v_n}{2}+v_n\right)=\frac{1}{3}(u_n+2v_n)=t_n$. On a donc $t_n=\frac{1}{3}(u_0+v_0)=\frac{7}{3}$.

b. Les suites (u_n) et (v_n) ont même limite l donc à l'infini, en remplaçant dans t_n : $\frac{7}{3}=\frac{1}{3}(l+2l)\Rightarrow l=\frac{7}{3}$.

Exercice 4 (5 points, Tle C)

1. a. Démonstration de cours.

b. $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+ab-b^2=1\\a^2+ab-b^2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a(a+b)-b\times b=1\\b(b-a)-a\times a=1\end{cases}$. Dans les deux cas on peut écrire $au+bv=1$: dans le premier $u=a+v,\ v=-b$, dans le second $u=b-a,\ v=-a$.

2. a. $a=b$: $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1\Leftrightarrow a^4=1\Rightarrow a=1$ $(a>0)$.

b. (1 ; 1) est déjà fait, (2 ; 3) : $\left(2^2+2.3-3^2\right)^2=1$ et (5 ; 8) : $\left(5^2+5.8-8^2\right)^2=(25+40-64)^2=1$.

c. $a^2+ab-b^2=1$: si on a $a^2-b^2>0$, alors a^2+ab-b^2 ne peut pas valoir 1 ; de même a^2+ab-b^2 ne peut valoir −1 dans ce cas puisqu'il serait positif. Dans tous les cas on a $a^2-b^2<0$.

3. a. $(y-x\,;x)$ est une solution ssi $(x\,;y)$ est une solution :

$$\left((y-x)^2+(y-x)x-x^2\right)^2=\left(y^2-2xy+x^2+xy-x^2-x^2\right)^2=\left(y^2-xy+x^2\right)^2=1\ ;$$

Même calcul pour $(y\,;y+x)$.

b. (2 ; 3) est solution donc $(3-2\,;2)=(1\,;2)$ et $(3\,;3+2)=(3\,;5)$ en sont ; (5 ; 8) est solution donc $(8-5\,;5)=(3\,;5)$ et $(8\,;5+8)=(8\,;13)$ en sont ; on a les nouvelles solutions : $(1\,;2)$, $(3\,;5)$ et $(8\,;13)$.

4. $a_0=a_1=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. Démonstration par récurrence : supposons que $(a_n\,;a_{n+1})$ est solution, alors $(y\,;y+x)=(a_{n+1}\,;a_n+a_{n+1})=(a_{n+1}\,;a_{n+2})$ est solution d'après le 3. a. Comme c'est vrai au rang 0 : (1 ; 1) est solution, c'est toujours vrai.

La question 1. b. justifie alors que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

<u>Remarque</u> : ce n'est pas la façon la plus rapide de montrer que deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux : soient u_{n+1} et u_n deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci.
Alors $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$; soit d un diviseur commun positif de u_{n+1} et u_n ; alors d divise u_{n-1}, donc d est un diviseur commun de u_n et u_{n-1}.
En itérant (et en descendant), il vient : d est un diviseur commun de $u_1=1$ et $u_0=1$ donc $d=1$ et u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux.

" L'homme arrive novice à chaque âge de la vie. "

HUITIEME EPREUVE

Exercice 1 (4 points)

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{1}{x(x^2-1)}$.

a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x>1$: $g(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-1}$.

b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$. Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer : $I=\displaystyle\int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln x\,dx$. On donnera le résultat sous la forme $p\ln 2+q\ln 3$ avec p et q rationnels.

Exercice 2 (6 points)

L'exercice comporte une annexe à rendre avec la copie.
Le but de ce problème est d'étudier, pour x et y éléments distincts de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, les couples solutions de l'équation $x^y=y^x$ (E) et, en particulier, les couples constitués d'entiers.

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln y}{y}$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. La courbe (C) représentative de la fonction h est donnée en annexe ; x_0 est l'abscisse du maximum de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

a. Rappeler la limite de la fonction h en $+\infty$ et déterminer la limite de la fonction h en 0.

b. Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de h ; retrouver les variations de h. Déterminer les valeurs exactes de x_0 et $h(x_0)$.

c. Déterminer l'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

3. Soit λ un élément de l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{1}{e}\right[$.

Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle $]1\,;e[$ et d'un unique nombre réel b de l'intervalle $]e\,;+\infty[$ tel que $h(a)=h(b)=\lambda$.

Ainsi le couple (a,b) est solution de (E).

4. On considère la fonction s qui, à tout nombre réel a de l'intervalle $]1\,;e[$, associe l'unique nombre réel b de l'intervalle $]e\,;+\infty[$ tel que $h(a)=h(b)$ (on ne cherchera pas à exprimer $s(a)$ en fonction de a).

Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes :

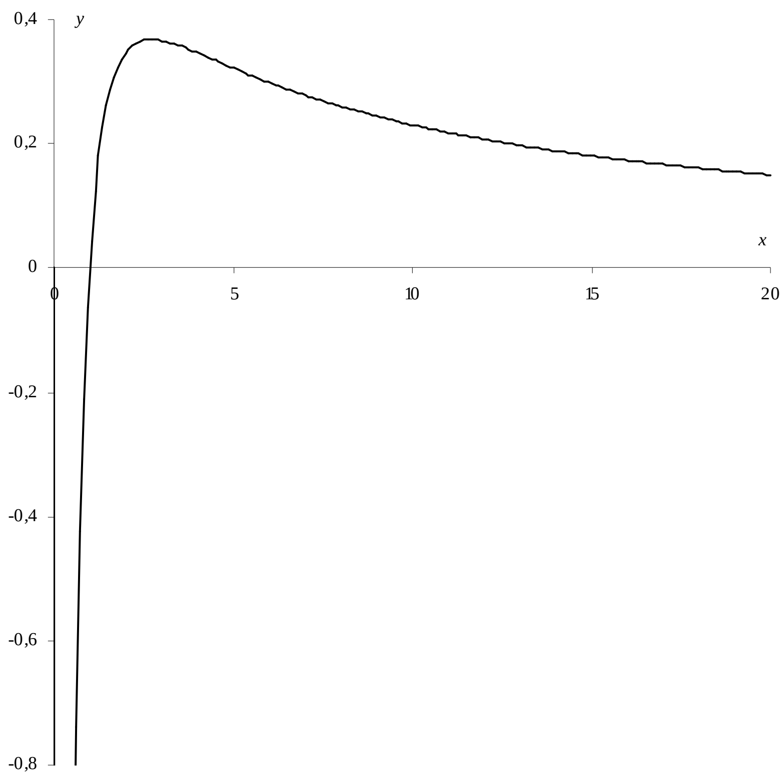
a. Quelle est la limite de s quand a tend vers 1 par valeurs supérieures ?

b. Quelle est la limite de s quand a tend vers e par valeurs inférieures ?

c. Déterminer les variations de la fonction s. Dresser le tableau de variations de s.

5. Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

A rendre avec la copie.



Exercice 3 (5 points)

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B. Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K1 et K2. L'expérience est modélisée de la manière suivante :

- Une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et dans K2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

- Une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

Partie A

1. Soit une particule au hasard. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 » ;

A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 » ;

B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 » ;

B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 » ;

C1 : « la particule entre dans K1 » ;

C2 : « la particule entre dans K2 ».

2. On procède 5 fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction. Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes. Calculer la probabilité de l'événement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K2 ».

Partie B

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B. On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t = 0$, on a $p(0) = 0,75$.

Plus généralement, si t est exprimé en années, on a $p(t) = 0,75e^{-\lambda t}$ où λ est une constante réelle. La demi-vie[1] des particules de type A est égale à 5730 ans.

1. Calculer λ ; on prendra une valeur approchée à 10^{-5} près par défaut.

2. Au bout de combien d'années, 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?

3. Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

Exercice 4 (5 points,)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0$.

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a = 4\sqrt{3} - 4i$ et $b = 4\sqrt{3} + 4i$.

a. Ecrire a et b sous forme exponentielle.

b. Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.

3. On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe du point D.

4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés $(O\,; -1)$, $(D\,; +1)$, $(B\,; +1)$.

a. Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6i$.

b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.

c. Montrer que les points C, D et G sont alignés.

d. Démontrer que le quadrilatère $OBGD$ est un parallélogramme.

Exercice 4 (5 points, TLE C)

L'exercice comporte une annexe à rendre avec la copie.

A et C sont deux points distincts du plan ; on note Γ le cercle de diamètre $[AC]$ et O le centre de Γ. B est un point du cercle Γ distinct des points A et C.

Le point D est construit tel que le triangle BCD soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = \dfrac{\pi}{3}(2\pi)$.

Le point G est le centre de gravité du triangle BCD. Les droites (AB) et (CG) se coupent en un point M.

Partie A

[1] Temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial.

1. Placer les points D, G et M sur la figure de la feuille annexe.

2. Montrer que les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment $[BC]$ et que le point G est le milieu du segment $[CM]$.

3. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre C transformant B en C.

Partie B

Dans cette question le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives -1 et $+1$.

Soit E le point construit pour que le triangle ACE soit équilatéral directe ; on a donc $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)=\dfrac{\pi}{3}(2\pi)$.

1. Calculer l'affixe du point E et construire le point E sur la feuille annexe.

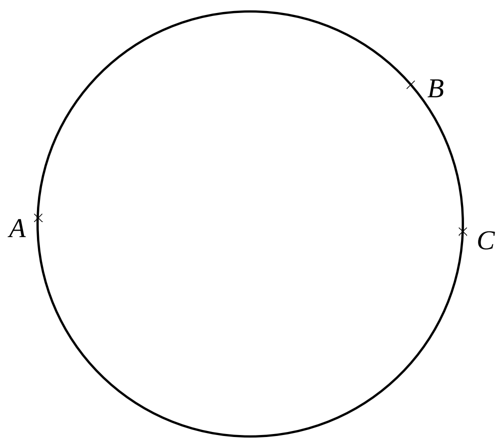
2. Soit σ la similitude directe d'expression complexe $z'=\dfrac{3+i\sqrt{3}}{4}z+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}$. Déterminer les éléments carctéristiques de σ et en déduire que σ est la similitude réciproque de s.

3. Montrer que l'image E' de E par σ a pour affixe $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et montrer que le point E' appartient au cercle Γ.

4. On note Σ le lieu des points M lorsque le point B décrit le cercle Γ privé des points A et C. Montrer que le point E appartient à Σ.

Soit O' l'image du point O par la similitude s. Démontrer que le point O' est le centre de gravité du triangle ACE. En déduire une construction de Σ.

A rendre avec la copie

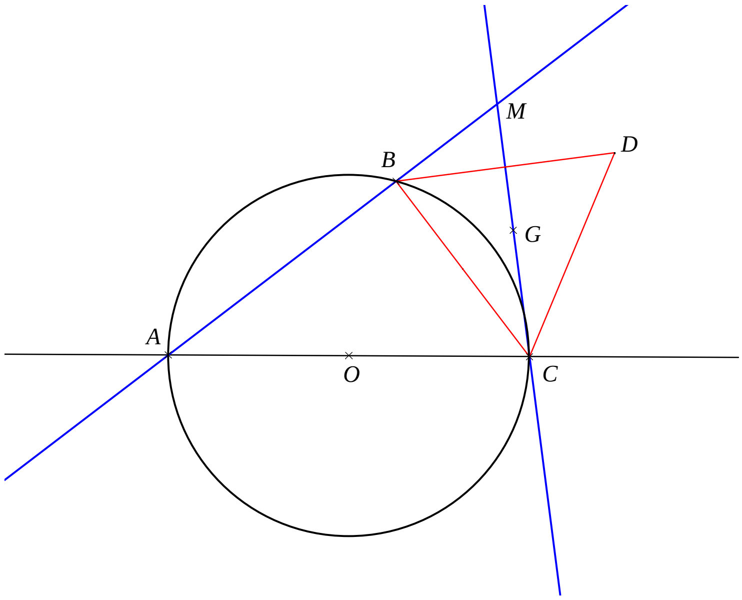


" Qui n'a pas l'esprit de son âge,
De son âge a tout le malheur. "

CORRECTION HUITIEME EPREUVE Inscrivez –vous au groupe al Kashi ou acheter le livre

. on vous propose ceci

Exercice 4 (5 pointsTle c)

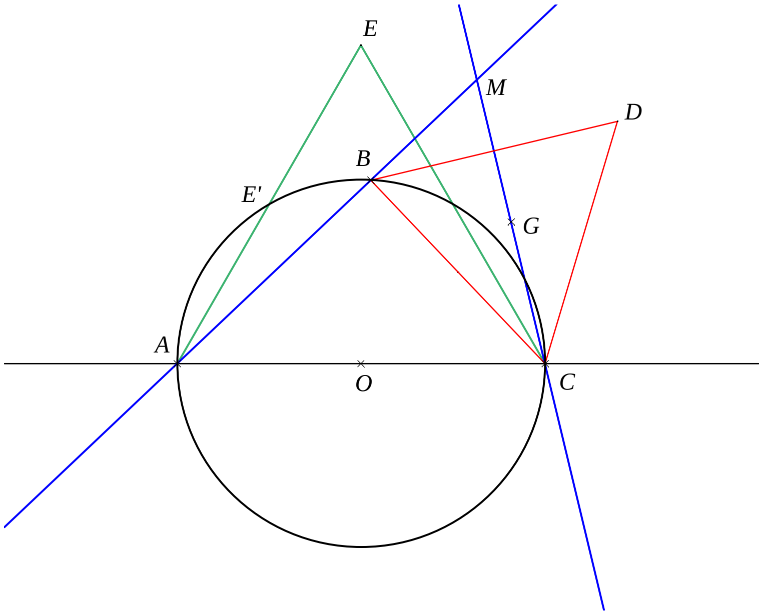


2. $[BC]$ est une corde du cercle Γ donc $OB = OC$; par ailleurs dans un triangle équilatéral le centre de gravité et le troisième sommet sont sur la médiatrice, ici sur celle de $[BC]$. (GC) est la médiatrice de $[BD]$; par ailleurs on a $\widehat{ABC} = 90°, \widehat{BCG} = 30°, \widehat{GBD} = 30°$ d'où $\widehat{DBM} = 180 - 90 - 30 - 30 = 30°$, moralité M est le symétrique de G par rapport à $[BD]$ et $GM = CG$.

3. On regarde les images par $s:\begin{cases} C \to C \\ B \to M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{CM}{CB} = 2\dfrac{CG}{CB} = 2\dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ \theta = \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM}\right) = -\dfrac{\pi}{6}(2\pi) \end{cases}$

Partie B

1.



2. $z'=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1-i\sqrt{3}}{4}$: $a=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et angle $\frac{\pi}{6}$. On cherche le centre : $z=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow z\left(1-\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow z\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow z=1$, c'est donc *C*. La réciproque d'une similitude a même centre, un rapport inverse et un angle opposé : c'est bien le cas ici.

3. *E* est sur l'axe imaginaire, son affixe est $i\sqrt{3}$ (hauteur d'un triangle équilatéral de côté 2). Son image a pour affixe $z'=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}i\sqrt{3}+\frac{1-i\sqrt{3}}{4}=\frac{3i\sqrt{3}-3+1-i\sqrt{3}}{4}=\frac{-2+2i\sqrt{3}}{4}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ qui a évidemment pour module 1 et est donc sur Γ.

4. Comme $E'=\sigma(E)$, on a $E=s(E')$ puisque *s* est la réciproque de σ ; comme *E'* est sur Γ, *E* est sur Σ.

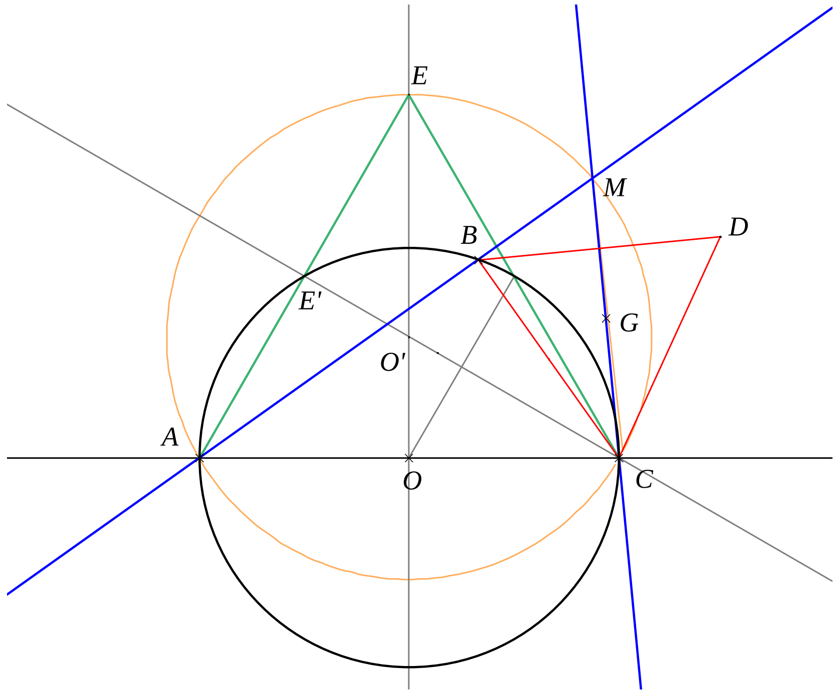
Lorsque *B* parcourt Γ, *M* parcourt le cercle de centre s(*O*)=*O'* et de rayon $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

On obtient l'affixe de *O'* « facilement » en écrivant que

$$z_{O'}-z_C=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{6}}(z_0-z_C)\Leftrightarrow z_{O'}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)+1=-1+\frac{i}{\sqrt{3}}+1=\frac{i}{\sqrt{3}}.$$

Celle du centre de gravité de *ACE* est $\frac{1}{3}(z_A+z_C+z_E)=\frac{1-1+i\sqrt{3}}{3}=\frac{i}{\sqrt{3}}$.

E est un point de Σ et *O'* son centre, la construction est faite.



Neuvième épreuve

Sujet 9

Exercice 1 (4 points)

On considère la fonction *f*, définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{e^t}{t}$.

1. a. Justifier la continuité de *f* sur $[1\,;+\infty[$.

b. Montrer que *f* est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

2. **Restitution organisée de connaissances**

On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.

Pour tout réel x_0 de $[1\,;+\infty[$, on note $A(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant *f* dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=x_0$.

a. Que vaut $A(1)$?

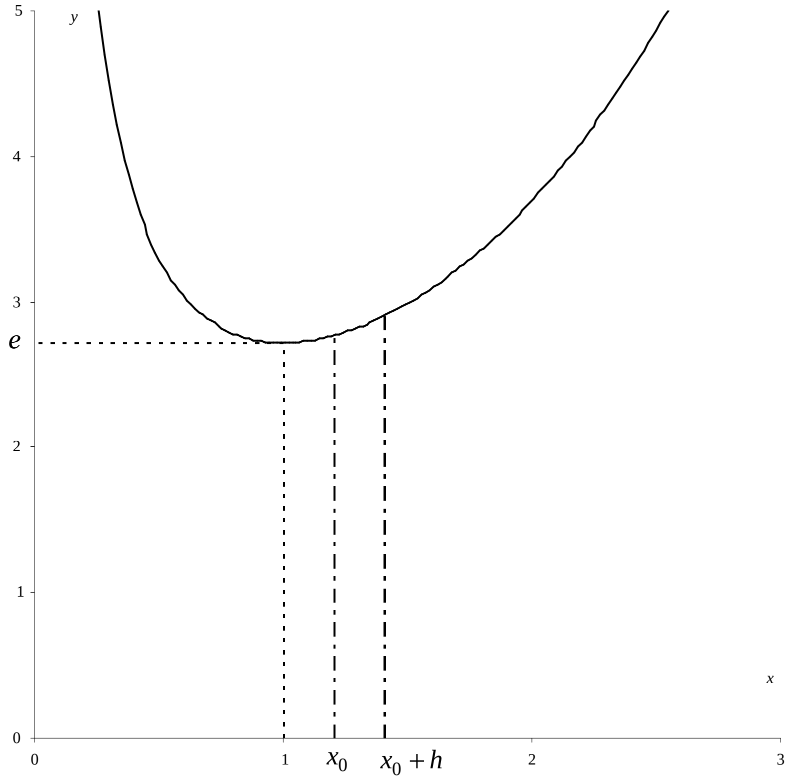
b. Soit x_0 un réel quelconque de $[1\,;+\infty[$ et *h* un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0)\leq\frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}\leq f(x_0+h).$$

c. Lorsque $x_0\geq 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h<0$ et tel que $x_0+h\geq 1$?

d. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction *A* ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction *A*.

e. Conclure.



Exercice 2 (5 points,)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$. On désigne par I le point d'affixe $z_I=1$, par A le point d'affixe $z_A=1-2i$, par B le point d'affixe $-2+2i$ et par (C) le cercle de diamètre $[AB]$.

On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Déterminer le centre Ω du cercle (C) et calculer son rayon.

2. Soit D le point d'affixe $z_D=\dfrac{3+9i}{4+2i}$. Ecrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle (C).

3. Sur le cercle (C), on considère le point E, d'affixe z_E, tel qu'une mesure en radians de $\left(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega E}\right)$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

a. Préciser le module et un argument de $z_E+\dfrac{1}{2}$.

b. En déduire que $z_E=\dfrac{5\sqrt{2}-2}{4}+\dfrac{5\sqrt{2}}{4}i$.

4. Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z'+\dfrac{1}{2}=e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z+\dfrac{1}{2}\right)$.

a. Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.

b. Soit K le point d'affixe $z_K = 2$. Déterminer par le calcul l'image de K par r. Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat.

Exercice 2 (5 points, Tle cs)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{3+4i}{5}\bar{z} + \dfrac{1-2i}{5}$.

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et imaginaires de z et z'. Démontrer que $\begin{cases} x' = \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \dfrac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$.

2. a. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

b. Quelle est la nature de l'application f ?

3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.

a. Donner une solution particulière $(x_0\,; y_0)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$.

b. Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$.

5. On considère les points M d'affixe $z = x+iy$ tels que $x=1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'. Déterminer les entiers y tels que $\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

Exercice 3 (5 points)

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1\,;0\,;2)$, $(1\,;1\,;4)$ et $(-1\,;1\,;1)$.

1. a. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;4\,;-2)$. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x+y+2z+1=0$ et $x-2y+6z=0$.

a. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.

b. La droite D et le plan (ABC) sont-ils parallèles ?

3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients 1, 2 et t.

a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t.

Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{IC}$.

b. Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment [IC] privé du point C. Pour quelle valeur de t, le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec G ?

Exercice 4 (6 points)

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leq 0,95u_n \text{ si et seulement si } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$.

a. Etudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f.

b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha)=1,9$.

c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0-1\leq\alpha\leq n_0$.

d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$.

3. a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.

b. Que peut-on en déduire pour la suite ?

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement : $0\leq u_n \leq 0,95^{n-16}u_{16}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

DIXIEME EPREUVE

SUJET 10

Exercice 1

4 points

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2+3i$, $-3-i$ et $2,08+1,98i$. Le triangle ABC est :

(a) : isocèle et non rectangle (b) : rectangle et non isocèle

(c) : rectangle et isocèle (d) : ni rectangle ni isocèle

2. À tout nombre complexe $z\neq-2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z'=\dfrac{z-4i}{z+2}$.

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'|=1$ est :

(a): un cercle de rayon 1 (b) : une droite

(c) : une droite privée d'un point (d): un cercle privé d'un point

3. Les notations sont les mêmes qu'à la question 2. L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :

(a): un cercle (b) : une droite

(c) : une droite privée d'un point (d): un cercle privé d'un point

4. Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe i. L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ est :

(a) : $z'=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ (b) : $z'=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

(c) : $z'=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ (d) : $z'=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

Exercice 2

6 points

Le graphique ci-dessous sera complété et remis avec la copie.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$.

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle [0 ; 2]. Montrer que si $x\in[1;2]$ alors $f(x)\in[1;2]$.

2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$,

$v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=f(v_n)$.

a. Le graphique donné en annexe représente la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2]. Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.

À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

b. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

Pour tout entier naturel n, $1\le v_n\le 2$.

Pour tout entier naturel n, $v_{n+1}\le v_n$.

On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :

Pour tout entier naturel n, $1\le u_n\le 2$.

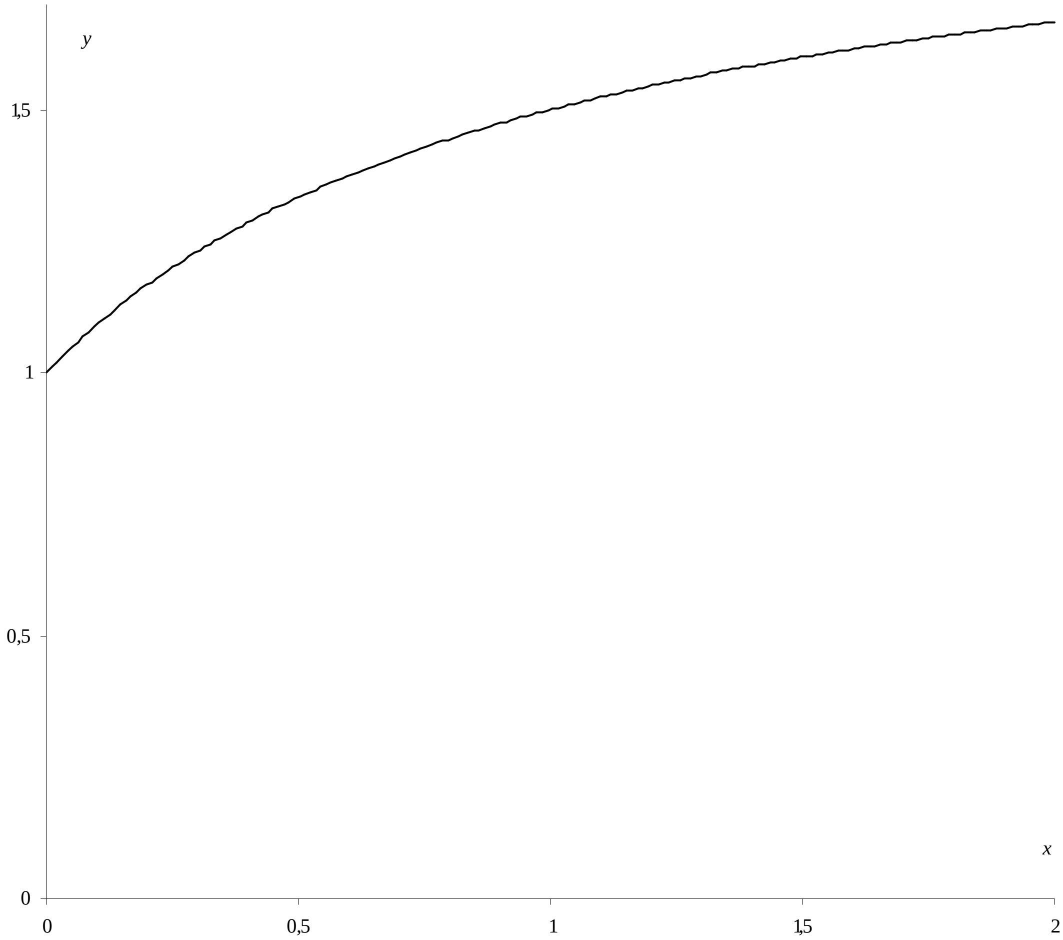
Pour tout entier naturel n, $u_n\le u_{n+1}$.

c. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n-u_n\ge 0$ et $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$.

d. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n-u_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

e. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α. Déterminer la valeur exacte de α.



Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; $+\infty$ [par $f(x) = (x-1)\left(2 - e^{-x}\right)$.

Sa courbe représentative C est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm).

1. a. Étudier la limite de f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à C .

c. Étudier la position relative de C et Δ .

2. a. Calculer $f'(x)$ etmontrer que $f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.

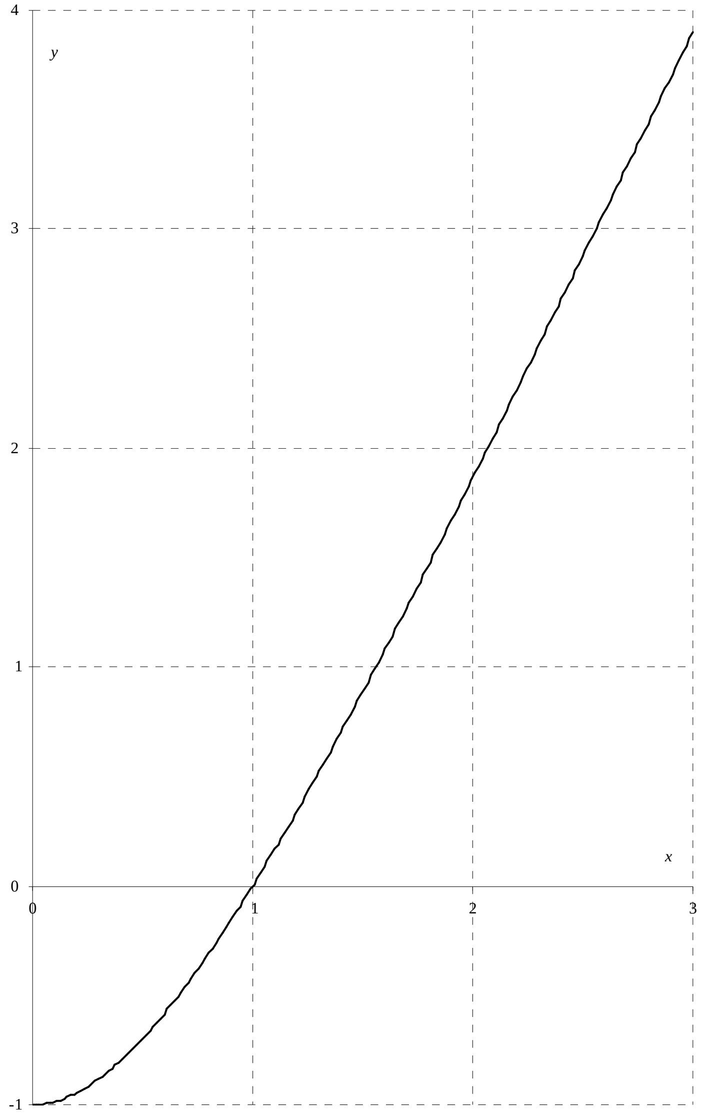
b. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.

c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f .

3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm², du domaine plan limité par la courbe C , la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

4. a. Déterminer le point A de C où la tangente à C est parallèle à Δ .

b. Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ .



Exercice 4

5 points

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.

On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes :

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

• si le dé indique 1, il tire au hasardune boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

• si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

• si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).

On définit les évènements suivants :

D_1 : « le dé indique 1 », D_2 : « le dé indique 2 »,

D_3 : « le dé indique 3 », G : « la partie est gagnée ».

A et B étant deux évènements tels que $p(A) \neq 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. a. Déterminer les probabilités $p_{D_1}(G)$, $p_{D_2}(G)$ et $p_{D_3}(G)$.

b. Montrer alors que $p(G) = \dfrac{23}{180}$.

2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

3. Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

Exercice 4 (Tle c)

5 points

La figure ci-dessous sera complétée au cours de l'exercice et remise avec la copie. On y laissera apparents les traits de construction.

Dans le plan orienté, on donne le triangle ABC tel que $AB = 2$, $AC = 1+\sqrt{5}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

1. a. <u>Démonstration de cours</u> : démontrer qu'il existe une seule similitude directe S transformant B en A et A en C.

b. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.

2. On appelle Ω le centre de S. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[AB]$ et à la droite (BC). Construire le point Ω.

3. On note D l'image du point C par la similitude S.

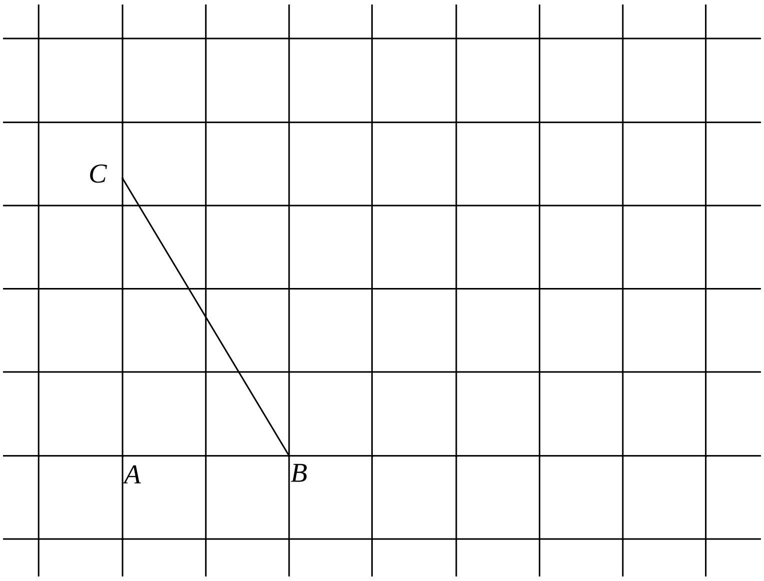
a. Démontrer l'alignement des points A, Ω et D ainsi que le parallélisme des droites (CD) et (AB). Construire le point D.

b. Montrer que $CD = 3+\sqrt{5}$.

4. Soit E le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).

a. Expliquer la construction de l'image F du point E par S et placer F sur la figure.

b. Quelle est la nature du quadrilatère $BFDE$?



" Qui chérit à l'excès sait haïr à l'excès. "

Corrigé de la dixième épreuve : Inscrivez –vous au groupe al Kashi ou acheter le livre on vous propose ceci

Exercice 4 (5 points Tle c)

$AB=2,\ AC=1+\sqrt{5}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$.

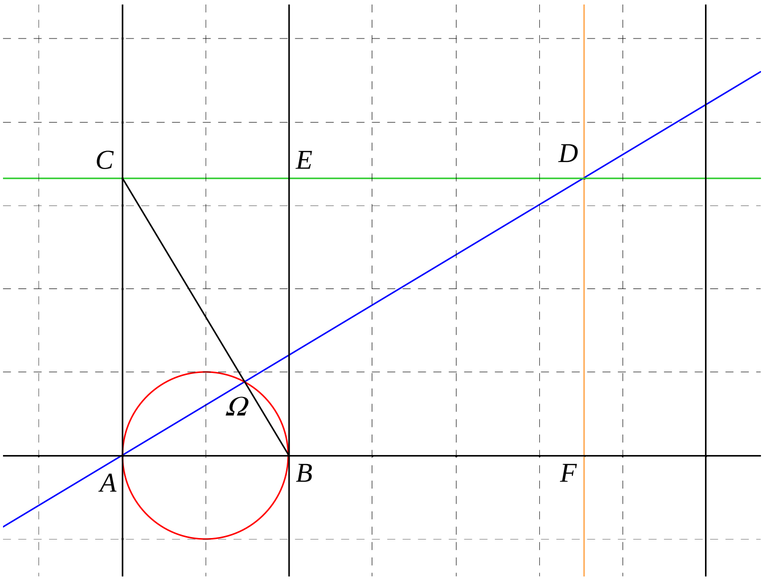
1. a. Prendre un repère de centre A, B a alors pour affixe 2 et C $(1+\sqrt{5})i$.

La similitude S qui envoie B en A et A en C s'écrit $z'=az+b \Rightarrow \begin{cases} 0=a.2+b \\ (1+\sqrt{5})i=a.0+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}i \\ b=(1+\sqrt{5})i \end{cases}$.

b. Le rapport de S est $|a|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et son angle est $\arg(a)=-\frac{\pi}{2}$.

2. Comme on a $\begin{cases} B\to A \\ A\to C \\ \Omega\to\Omega \end{cases} \Rightarrow \left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\pi}{2}=\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega C}\right)=\left(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega A}\right)$ donc Ω appartient au cercle de diamètre $[AB]$; par ailleurs en effectuant deux fois S, on a $\begin{cases} B\to A\to C \\ A\to C \\ \Omega\to\Omega\to\Omega \end{cases} \Rightarrow \left(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega C}\right)=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\pi$ d'où Ω appartient à la droite (BC).

3. a. Reprenons ce que l'on vient de faire : $\begin{cases} B\to A\to C \\ A\to C\to D \\ \Omega\to\Omega\to\Omega \end{cases} \Rightarrow \left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega D}\right)=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\pi$ donc A, Ω et D sont alignés ; de plus $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)=-\pi$ donc les droites (CD) et (AB) sont parallèles.



b. Ona $CD=|a|AC=|a|^2 AB=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 .2=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{2}=3+\sqrt{5}$.

4. Soit *E* le projeté orthogonal du point *B* sur la droite (*CD*).

a. La droite (*BE*) se transforme en une droite perpendiculaire à (*BE*) passant par l'image de *B*, soit *A*, c'est (*AB*). La droite (*CE*) se transforme en une droite perpendiculaire à (*CE*) passant par l'image de *C*, soit *D*, c'est (*DF*).

b. Le quadrilatère *BFDE* semble être un carré…

On a $CD=3+\sqrt{5}$ donc $DE=3+\sqrt{5}-2=1+\sqrt{5}=CA=DF$; de plus on a des angles droits partout, c'est bon.

En fait le rectangle AFDC est un « rectangle d'or », soit tel que $\frac{CD}{CA}=\frac{CA}{CE}$*, c'est la « divine proportion ».*

ONZIEME EPREUVE

SUJET 11

Exercice 1 (5 points,)

$(O\ ;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal du plan P. Soit *A* le point d'affixe 1 et *B* le point d'affixe −1.

Soit *F* l'application de P privé de *O* dans P qui à tout point *M* d'affixe *z* distinct de *O* associe le point *M'* = *F*(*M*) d'affixe $z'=\frac{-1}{\overline{z}}$.

1. a. Soit *E* le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{3}}$; on appelle *E'* son image par *F*. Déterminer l'affixe de *E'* sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

b. On note C_1 le cercle de centre *O* et de rayon 1. Déterminer l'image de C_1 par l'application *F*.

2. a. Soit K le point d'affixe $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et K' l'image de K par F. Calculer l'affixe de K'.

b. Soit C_2 le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de C_2 par l'application F.

3. On désigne par R un point d'affixe $1+e^{i\theta}$ où $\theta \in \left]-\pi\,;+\pi\right[$. R appartient au cercle C_3 de centre A et de rayon 1.

a. Montrer que $z'+1=\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}$. En déduire que : $|z'+1|=|z'|$.

b. Si on considère maintenant les points d'affixe $1+e^{i\theta}$, $\theta \in \left]-\pi\,;+\pi\right[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du 3. a.

Exercice 1 (5 points, Tle c)

1. a. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.

b. Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7(9)$.

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $((10)^n \equiv 1(9)$.

b. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres. Démontrer la relation suivante : $N \equiv S(9)$.

c. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

3. On suppose que $A=(2005)^{2005}$; on désigne par :

– B la somme des chiffres de A ;
– C la somme des chiffres de B ;
– D la somme des chiffres de C.

a. Démontrer la relation suivante : $A \equiv D(9)$.

b. Sachant que 2005 < 10000, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que $B \leq 72180$.

c. Démontrer que $C \leq 45$.

d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

e. Démontrer que D = 7.

Exercice 2 (6 points)

1. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de [0 ; 1] : $\dfrac{1}{n}-\dfrac{x}{n^2} \leq \dfrac{1}{x+n} \leq \dfrac{1}{n}$.

2. a. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+n}\,dx$.

b. Déduire en utilisant 1., que : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ puis que $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n}$.

3. On appelle U la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $U(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n)$.

Démontrer que U est décroissante (on pourra utiliser 2. b.)

4. On désigne par V la suite de terme général : $V(n)=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$.

Démontrer que V est croissante.

5. Démontrer que U et V convergent vers une limite commune notée γ. Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par la méthode de votre choix.

Exercice 3 (3 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant â la réponse choisie.

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.

40% des écrivains de romans policiers sont français et 70% des écrivains de biographies sont français. Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :

a. 0,4 b. 0,75 c. $\frac{1}{150}$.

2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :

a. 0,3 b. 0,8 c. 0,4

3. La probabilité que Ie lecteur choisisse un roman policier français est :

a. 1,15 b. 0,4 c. 0,3

4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

a. 0,9 b. 0,7 c. 0,475

5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :

a. $\frac{4}{150}$ b. $\frac{12}{19}$ c. 0,3

6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque. La probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :

a. $1-(0,25)^{20}$ b. $20\times 0,75$ c. $0,75\times(0,25)^{20}$

Exercice 4 (6 points)

A. Soit $[KL]$ un segment de l'espace ; on note I son milieu. On appelle plan médiateur de $[KL]$ le plan perpendiculaire en I à la droite (KL).

Démontrer que le plan médiateur de $[KL]$ est l'ensemble des points de l'espace équidistants de K et L.

B. Ici l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$; on considère les points

$$A(4 ; 0 ; -3),\ B(2 ; 2 ; 2),\ C(3 ; -3 ; -1),\ D(0 ; 0 ; -3).$$

1. Démontrer que le plan médiateur de $[AB]$ a pour équation

$$4x-4y-10z-13=0.$$

On admet pour la suite que les plans médiateurs de $[BC]$ et $[CD]$ ont respectivement pour équations

$$2x-10y-6z-7=0 \text{ et } 3x-3y+2z-5=0.$$

2. Démontrer, en résolvant un système d'équations linéaires, que ces trois plans ont un unique point commun E dont on donnera les coordonnées.

3. En utilisant la partie A montrer que les points A, B, C et D sont sur une sphère de centre E. Quel est le rayon de cette sphère ?

DOUZIEME EPREUVE ET SON CORRIGE

DOUZIEME EPREUVE

Exercice 1 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on appelle D la droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = -3-t \end{cases}$ et P le plan d'équation cartésienne $x + 2y - 3z - 1 = 0$.

Vous pouvez consulter et télécharger gratuitement les solutions sur le site ***http://sila.e-monsite.com***

Dans chacune des lignes du tableau ci-dessous, une seule affirmation est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la ligne et la lettre correspondant à l'affirmation choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Numéro de la ligne	Affirmation A	Affirmation B	Affirmation C
1	Le point M de coordonnées $(-1 ; 3 ; 2)$ appartient à D	Le point N de coordonnées $(2 ; -1 ; -1)$ appartient à D	Le point R de coordonnées $(3 ; 1 ; -4)$ appartient à D
2	Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1 ; 2 ; -3)$ est un vecteur directeur de D	Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(-2 ; 1 ; 1)$ est un vecteur directeur de D	Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(3 ; 1 ; -4)$ est un vecteur directeur de D
3	D est incluse dans P	D est strictement parallèle à P	D est sécante à P
4	Le point G de coordonnées $(1 ; 3 ; -2)$ appartient à P	Le point H de coordonnées $(1 ; 3 ; 2)$ appartient à P	Le point K de coordonnées $(1 ; 3 ; -1)$ appartient à P
5	Le plan Q_1 d'équation cartésienne $x + 2y - 3z + 1 = 0$ est perpendiculaire à P	Le plan Q_2 d'équation cartésienne $4x - 5y - 2z + 3 = 0$ est perpendiculaire à P	Le plan Q_3 d'équation cartésienne $-3x + 2y - z - 1 = 0$ est perpendiculaire à P
6	La distance du point T de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ au plan P est $\sqrt{14}$	La distance du point T de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ au plan P est 14	La distance du point T de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ au plan P est $2\sqrt{3}$

Exercice 2 (5 points)

Une association organise une loterie pour laquelle une participation m exprimée en euros est demandée.

Un joueur doit tirer simultanément au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.

Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.

Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.

Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

• sur $\frac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 F,

• sur $\frac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 F,

• sur le reste le joueur est remboursé de sa participation m.

On appelle V l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules vertes ».

On appelle J l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes ».

On appelle R l'évènement « le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien ».

1. Quelques calculs.

a. Calculer les probabilités $P(\mathrm{V})$ et $P(\mathrm{J})$ des évènements respectifs V et J.

b. On note $P_{\mathrm{V}}(\mathrm{R})$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes. Déterminer $P_{\mathrm{V}}(\mathrm{R})$ puis $P(\mathrm{R} \cap \mathrm{V})$.

c. Calculer $P(\mathrm{R})$.

d. Calculer la probabilité de gagner les 100 €, puis la probabilité de gagner les 20 € de la roue.

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est-à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.

a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et vérifier que $P(X=-m)$ est 0,6.

c. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $E(X)=\frac{140-51m}{80}$.

d. L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur entière en euro. Quelle valeur minimale faut-il donner à m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

3. Un joueur se présente et décide de jouer 4 fois, quels que soient les résultats obtenus. Calculer la probabilité qu'il perde au moins une fois sa mise.

4. On voudrait qu'un joueur ait plus d'une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner quand il joue une seule fois. On note G cet évènement. Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes. On appelle n le nombre de boules jaunes, on suppose $n \geq 1$.

Calculer la valeur minimale de n pour que la condition précédente soit vérifiée.

Exercice 3 (5 points,)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0.$$

I. Résolution de l'équation (E).

1. Montrer que $-i$ est solution de (E).

2. Déterminer les nombres réels a, b, c tels que : $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(az^2+bz+c)$.

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4+i$, $4-i$, $-i$.

1. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.

2. Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de S.

3. Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer (C).

4. À tout point M d'affixe $z\neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z'=\frac{iz+10-2i}{z-2}$.

a. Déterminer les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C.

b. Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle (C') de centre P, d'affixe i.

Déterminer son rayon et tracer (C').

c. Pour tout nombre complexe $z\neq 2$, exprimer $|z'-i|$ en fonction de z.

d. Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle (C). Démontrer que $|z'-i|=2\sqrt{5}$.

e. En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle (C).

Correction

I. 1. $(-i)^3+(-8+i)(-i)^2+(17-8i)(-i)+17i=i+8-i-17i-8+17i=0$.

2. Développement puis identification donnent $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(z^2-8z+17)$.

3. $z^2-8z+17=0$ a pour racines $4+i$ et $4-i$.

II. 1. Voir plus loin.

2. $R_{(\Omega,\frac{\pi}{2})}: A\to S \Leftrightarrow s-\omega=i(a-\omega)\Leftrightarrow s=i(4+i-2)+2=1+2i$.

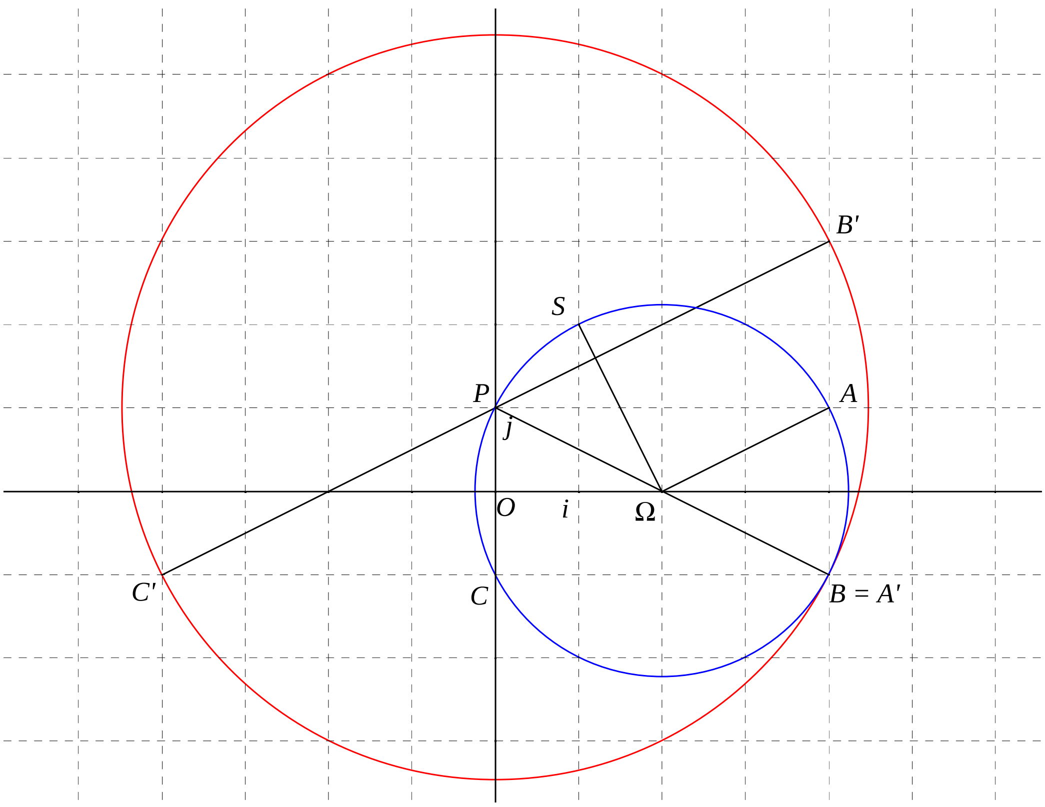
3. Il est assez évident sur la figure que (C) a pour centre Ω et pour rayon $OA=|2+i|=\sqrt{5}$. On vérifie aisément que $\Omega B=\Omega C=\Omega S=\sqrt{5}$.

4. a. $z_{A'}=\dfrac{i(4+i)+10-2i}{4+i-2}=\dfrac{9+2i}{2+i}=\dfrac{(9+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{20-5i}{5}=4-i$,

$z_{B'}=\dfrac{i(4-i)+10-2i}{4-i-2}=\dfrac{11+2i}{2-i}=\dfrac{(11+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{20+15i}{5}=4+3i$,

$z_{C'}=\dfrac{i(i)+10-2i}{i-2}=\dfrac{9-2i}{-2+i}=\dfrac{(9-2i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)}=\dfrac{-20-5i}{5}=-4-i$.

b. Il est immédiat que $PA'=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}=PB'=PC'$.



c. $|z'-i|=\left|\dfrac{iz+10-2i}{z-2}-i\right|=\left|\dfrac{iz+10-2i-iz+2i}{z-2}\right|=\left|\dfrac{10}{z-2}\right|=\dfrac{10}{|z-2|}$.

d. *M* un point d'affixe *z* appartenant au cercle (C) est tel que $|z-2|=\sqrt{5}$ d'où $|z'-i|=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=\dfrac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$.

e. Donc si *M* appartient au cercle (C), *M'* appartiendra au cercle de centre le point *P* d'affixe *i*, de rayon $2\sqrt{5}$.

Exercice 3 (5 points, Tle c)

Le but de cet exercice est d'étudier les similitudes directes qui transforment l'ensemble S_1 des sommets d'un carré C_1 donné en l'ensemble S_2 des sommets d'un carré C_2 donné.

Le plan complexe est rapporte à un repère orthonormal direct $R=(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B, C, D, E, F, G, H d'affixes respectives $-\frac{1}{2}i$, $1-\frac{1}{2}i$, $1+\frac{1}{2}i$, $\frac{1}{2}i$, $1-i$, $3-i$, $3+i$, $1+i$.

C_1 est le carré de sommets A, B, C, D et de centre O_1, C_2 est le carré de sommet E, F, G, H de centre O_2. S_1 est donc l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ et S_2 l'ensemble $\{E, F, G, H\}$.

1. Placer tous les points dans le repère R, construire les carrés C_1 et C_2.

2. Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe -1 et de rapport 2. Donner l'écriture complexe de h et prouver que h transforme S_1 en S_2.

3. Soit s une similitude directe qui transforme S_1 en S_2 et soit g la transformation $g=h^{-1}\circ s$.

a. Quel est le rapport de la similitude s ?

b. Prouver que g est une isométrie qui laisse S_1 globalement invariant.

c. Démontrer que $g(O_1)=O_1$.

d. En déduire que g est l'une des transformations suivantes : l'identité, la rotation r_1 de centre O_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$, la rotation r_2 de centre O_1 et d'angle π, la rotation r_3 de centre O_1 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

e. En déduire les quatre similitudes directes qui transforment S_1 en S_2.

4. Étude des centres de ces similitudes.

a. Déterminer les écritures complexes de $h\circ r_1$, $h\circ r_2$, $h\circ r_3$.

b. En déduire les centres Ω_1, Ω_2, Ω_3 de ces similitudes et les placer sur le dessin.

Exercice 4 (7 points)

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.

On définit, pour tout entier naturel $n\geq 1$, l'intégrale $I_n=\int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x\,dx$.

1. Calculer I_1.

2. Établir que pour tout entier naturel $n\geq 1$, $0\leq I_n\leq \frac{2^n}{n!}(e^2-1)$.

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n\geq 1$, $I_{n+1}=I_n-\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

4. Démontrer par récurrence que $e^2=1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\ldots+\frac{2^n}{n!}+I_n$.

5. On pose, pour tout entier naturel $n\geq 1$, $u_n=\frac{2^n}{n!}$.

a. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n\geq 3$, $u_{n+1}\leq \frac{1}{2}u_n$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.

6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n).

7. Justifier enfin que : $e^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\ldots+\frac{2^n}{n!}\right)$.

TREIZIEME EPREUVE ET SA CORRECTION

Exercice 1 (3 points)

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits.

On admet que lors du premier appel téléphonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est 0,4 et que s'il décroche, la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire est 0,3.

On pourra construire un arbre pondéré.

1. On note :

• D_1 l'évènement : « la personne décroche au premier appel » ;

• R_1 l'évènement « la personne répond au questionnaire lors du premier appel ».

Calculer la probabilité de l'évènement R_1.

2. Lorsqu'une personne ne décroche pas au premier appel, on la contacte une seconde fois. La probabilité pour que le correspondant ne décroche pas la seconde fois est 0,3 et la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire sachant qu'il décroche est 0,2. Si une personne ne décroche pas lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

On note :

• D_2 l'évènement : « la personne décroche au second appel ».

• R_2 l'évènement : « la personne répond au questionnaire lors du second appel ».

• R l'évènement : « la personne répond au questionnaire ».

Montrer que la probabilité de l'évènement R est 0,236.

3. Sachant qu'une personne a répondu au questionnaire, calculer la probabilité pour que la réponse ait été donnée lors du premier appel (on donnera la réponse arrondie au millième).

4. Un enquêteur a une liste de 25 personnes à contacter. Les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Quelle est la probabilité pour que 20 % des personnes répondent au questionnaire (on donnera la réponse arrondie au millième) ?

Exercice 2 (5 points,)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 8 cm.

On appelle A le point d'affixe −1 et B le point d'affixe 1. On appelle E l'ensemble des points du plan distincts de A, O et B.

À tout point M d'affixe z appartenant à E, on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3.

1. Prouver que les points M, N et P sont deux à deux distincts.

2. On se propose dans cette question de déterminer l'ensemble C des points M appartenant à E tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a. En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que MNP est rectangle en P si et seulement si

$$|z+1|^2+|z|^2=1\,.$$

b. Démontrer que $|z+1|^2+|z|^2=1$ équivaut à $\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4}$.

c. En déduire l'ensemble C cherché.

3. Soit M un point de E et z son affixe, on désigne par r le module de z et α l'argument de z, $\alpha\in\left]-\pi\,;+\pi\right]$.

a. Démontrer que l'ensemble F des points M de E tels que l'affixe de P soit un réel strictement positif est la réunion de trois demi-droites (éventuellement privées de points).

b. Représenter les ensembles C et F dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

c. Déterminer les affixes des points M de E tels que le triangle MNP soit rectangle en P, l'affixe de P étant un réel strictement positif.

Exercice 2 (5 points, TelC)

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier. On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.
3. Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier. On se propose de chercher des couples d'entiers naturels (a ; b) vérifiant la relation (E) : $a^2 - 250\,507 = b^2$.

1. Soit X un entier naturel.

a. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.

b. Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2.

c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.

2. Justifier que si le couple (a ; b) vérifie la relation (E), alors $a \geq 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type (501 ; b).

3. On suppose que le couple (a ; b) vérifie la relation (E).

a. Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.

b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple (505+9k ; b) soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.
2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?
3. Cette écriture est-elle unique ?

Exercice 3 (5 points)

Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A avec $AB = AC = AD = a$. On appelle A_1 le centre de gravité du triangle BCD.

1. Montrer que la droite (AA_1) est orthogonale au plan (BCD) (on pourra par exemple calculer $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{BC}$).

2. En exprimant de deux façons différentes le volume du tétraèdre $ABCD$, calculer la longueur du segment [AA_1].

3. On appelle G l'isobarycentre du tétraèdre $ABCD$ et I le milieu de [BC].

a. Montrer que G appartient au segment [AA_1] et déterminer la longueur AG.

b. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$.

4. Soit H le symétrique de A par rapport à G.

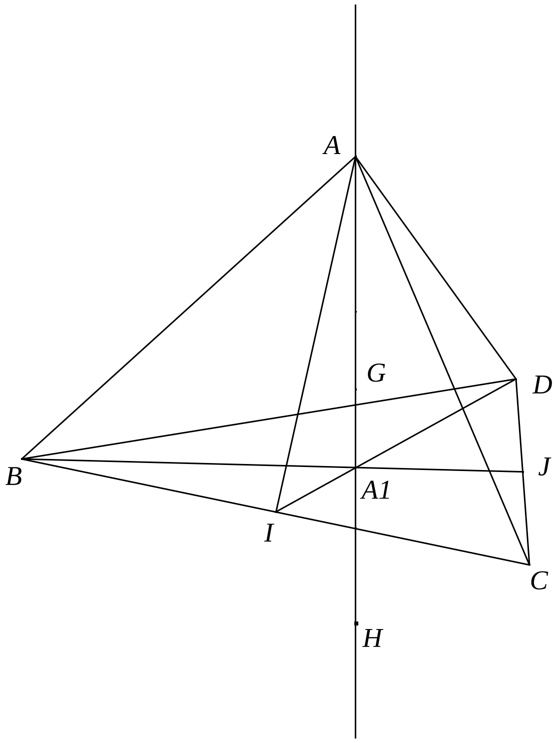
a. Démontrer que $4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}$.

b. Démontrer l'égalité $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BA}$.

c. En déduire que $HC = HD$.

On rappelle que le volume d'une pyramide de hauteur h et d'aire de base associée b est $V = \frac{1}{3}hb$.

Correction



Attention à bien lire l'énoncé…Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles **isocèles rectangles** en A avec $AB = AC = AD = a$. On appelle A_1 le centre de gravité du triangle BCD.

1. (AA_1) est dans le plan médiateur de $[BC]$ puisque $AB = AC$ (ABC isocèle) et $A_1B = A_1C$ (BCD équilatéral), (BC) est donc orthogonale à toutes les directions de ce plan, particulièrement à (AA_1).

Le calcul des produits scalaires n'est pas nécessaire et en plus risque d'embrouiller l'esprit…

2. D'un côté on a $BC = a\sqrt{2}$, $DI = BC\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ d'où

$$V = \frac{1}{3}\text{aire}(BCD).AA_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{2}\right)AA_1 = \frac{a^2\sqrt{6}}{6}AA_1 ,$$

d'un autre côté on a (DA) orthogonal à (AB) et (AC), donc (DA) orthogonal à (ABC), soit $V = \dfrac{1}{3}aire(ABC).DA = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}a^2\right)a = \dfrac{1}{6}a^3$; on en déduit $AA_1 = \dfrac{1}{6}a^3\dfrac{6}{a^2\sqrt{6}} = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

3. a. G = barycentre de $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$ ou encore de $\{(A, 1), (A_1, 3)\}$, on a donc $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}$ donc G appartient au segment $[AA_1]$ et $AG = \dfrac{3}{4}AA_1 = \dfrac{3a}{4\sqrt{6}}$.

b. On introduit G dans le vecteur de gauche, I dans celui de droite, et on a $\left\|4\overrightarrow{MG}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MI}\right\| \Leftrightarrow MG = MI$.

L'ensemble cherché est le plan médiateur de $[GI]$.

4. a. On met G partout et on utilise $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD} = \vec{0}$:

$$4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GA} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{BG} = \vec{0} ..$$

b. On factorise : $HC^2 - HD^2 = \left(\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HD}\right)\left(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD}\right) = \overrightarrow{DC}.2\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BA}$ (Thalès dans $ABHJ$).

c. Comme (DC) est orthogonal à (AB), on a $HC^2 = HD^2 \Rightarrow HC = HD$.

Exercice 4 (7 points)

I. Première partie

On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x)=\ln(1+x)-x \text{ et } g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}.$$

1. Étudier les variations de f et de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. En déduire que pour tout $x\geq 0$, $x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x$.

II. Deuxième partie

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par : $u_1=\frac{3}{2}$ et $u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n\geq 1$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n\geq 1$:

$$\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

3. On pose $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ et $T_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}$

À l'aide de la première partie, montrer que : $S_n-\frac{1}{2}T_n\leq \ln u_n\leq S_n$.

4. Calculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

5. Étude de la convergence de la suite (u_n).

a. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b. En déduire que (u_n) est convergente. Soit l sa limite.

c. On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n\leq w_n$ pour tout n entier naturel, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\leq \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Montrer alors que $\frac{5}{6}\leq \ln l\leq 1$ et en déduire, un encadrement de l.

QUATORZIEME EPREUVE ET SA CORRECTION

Sujet 14 et sa correction

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des huit affirmations (entre guillemets) ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention « vrai » ou « faux ».

Une réponse correcte rapporte 0,5 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points. Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.

1. « Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a\,;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ».

2. Soient f et g deux fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$, g ne s'annulant pas :

« Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$ ».

3. « Si f est une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ telle que $0 \le f(x) \le \sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ».

4. On considère un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

« Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ ».

5. « La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2+3x+1)e^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'-y = (2x+3)e^x$ ».

6. Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et −2.

« Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3,−2 et 1 alors G est le milieu du segment $[CI]$ ».

7. Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, −2 et 1.

« L'ensemble des points M du plan tels que $\left\|3\overline{MA} - 2\overline{MB} + \overline{MC}\right\| = 1$ est le cercle de centre G et de rayon 1 ».

8. Soient A et B deux points distincts du plan. On désigne par M un point quelconque du plan.

« Le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ est nul si et seulement si $M = A$ ou $M = B$ ».

Exercice 2 (3 points)

Un fabricant d'écrans plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication.

Si le test est positif (c'est-à-dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client. Sinon l'écran retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'écran est acheminé chez le client, sinon il est détruit.

Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70 % des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les écrans réparés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succès.

On note T_1 l'évènement : « le premier test est positif ».

On note C l'évènement : « l'écran est acheminé chez le client ».

1. On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication. Déterminer les probabilités des évènements T_1 et C.

2. La fabrication d'un écran revient à 1000 € au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois. Cela lui coûte 50 € de plus si l'écran doit être testé une seconde fois.

Un écran est facturé a euros (a étant un réel positif) au client.

On introduit la variable aléatoire X qui, à chaque écran fabriqué, associe le «gain » (éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.

a. Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de a.

b. Exprimer l'espérance de X en fonction de a.

c. À partir de quelle valeur de a, l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices ?

Exercice 3 (8 points)

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$.

1. Montrer que la fonction $f : t \to (2-t)e^t$ est une primitive de $g : t \to (1-t)e^t$ sur [0 ; 1]. En déduire la valeur de u_1.

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul, $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ (R).

Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par la première calculatrice	Valeur de u_n affichée par la deuxième calculatrice
1	7,1828182845 E-01	7,1828182846 E-01
2	4,3656365691 E-01	4,3656365692 E-01
3	3,0969097075 E-01	3,0969097076 E-01
4	2,3876388301 E-01	2,3876388304 E-01
5	1,9381941508 E-01	1,9381941520 E-01
6	1,6291649051 E-01	1,6291649120 E-01
7	1,40415433581 E-01	1,4041543840 E-01
8	1,2332346869 E-01	1,2332350720 E-01
9	1,0991121828 E-01	1,0991156480 E-01
10	9,9112182825 E-02	9,9115648000 E-02
11	9,0234011080 E-02	9,0272128000 E-02
12	8,2808132963 E-02	8,3265536000 E-02
13	7,6505728522 E-02	8,2451968000 E-02
14	7,1080199309 E-02	1,5432755200 E-01

15	6,6202989636 E-02	1,31491328006 E+00
16	5,9247834186 E-02	2,0038612480 E+01
17	7,2131811612 E-02	3,3965641216 E+02
18	−8,7016273909 E-02	6,1128154189 E+03
19	−1,7533092042 E-02	1,1614249296 E+05
20	−3,5166184085 E-02	2,3228488592 E+06
21	−7,3858986580 E-02	4,8779825043 E+07
22	−1,6249077047 E-02	1,0731561499 E+09
23	−3,7372887209 E-02	2,4682591448 E+10
24	−8,9694930302 E-02	5,923821947 E+11
25	−2,242372585 E-02	1,4809554869 E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la définition : pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq 0$.

2. a. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel non nul n,

$$(1-t)^n e^t \leq (1-t)^n e.$$

b. En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leq \frac{e}{n+1}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n) : $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$.

Étant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par : $v_1 = a$ et pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1} = (n+1)v_n - 1$.

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$v_n = u_n + (n!)(a + 2 - e)$$

où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.

2. Étudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a. (On rappelle : $\lim_{n \to +\infty} n! = +\infty$)

3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

Exercice 4 (5 points,)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 0,5 cm. On note j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.

Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Placer les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné.
2. On appelle a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'.

a. Calculer a'. On vérifiera que a' est un nombre réel.

b. Montrer que $b'=16e^{-i\frac{\pi}{3}}$. En déduire que O est un point de la droite (BB').

c. On admet que $c'=7+7i\sqrt{3}$. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.

3. On se propose désormais de montrer que la distance $MA+MB+MC$ estminimale lorsque $M = O$.

a. Calculer la distance $OA + OB + OC$.

b. Montrer que $j^3=1$ et que $1+j+j^2=0$.

c. On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe. On rappelle que $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$. Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right|=\left|a+bj^2+cj\right|=22.$$

d. On admet que, quels que soient les nombres complexes z, $|z+z'+z''|\leq|z|+|z'|+|z''|$. Montrer que $MA+MB+MC$ est minimale lorsque $M = O$.

<u>Correction</u> Inscrivez –vous au groupe al Kashi ou acheter le livre

<u>QuINZIEME EPREUVE</u>

SUJET 15

Exercice 1 (4 points)

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

PARTIE A : QUESTION DE COURS

On suppose connus les résultats suivants :

(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n\leq v_n$;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

PARTIE B

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

Exercice 2 (5 points,Tle C)

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de la figure donnée ci-dessous.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Le quadrilatère *MNPQ* est un quadrilatère non croisé et de sens direct. Les triangles *MRN*, *NSP*, *PTQ* et *QUM* sont des triangles rectangles isocèles, extérieurs au quadrilatère *MNPQ* et de sens direct (les sommets des angles droits étant respectivement les points *R*, *S*, *T* et *U*).

Partie A

On désigne par m, n, p et q, les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1. Soit f la similitude directe de centre M qui transforme N en R.

a. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude f.

b. On désigne par r l'affixe du point R. Démontrer que $r = \frac{1+i}{2}m + \frac{1-i}{2}n$ où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ (on pourra éventuellement utiliser l'écriture complexe de la similitude f).

On admettra que l'on a également les résultats $s = \frac{1+i}{2}n + \frac{1-i}{2}p$, $t = \frac{1+i}{2}p + \frac{1-i}{2}q$ et $u = \frac{1+i}{2}q + \frac{1-i}{2}m$, où s, t et u désignent les affixes respectives des points S, T et U.

2. Démontrer que les quadruplets (M, N, P, Q) et (R, S, T, U) ont le même isobarycentre.

3. a. Démontrer l'égalité $u - s = i(t - r)$.

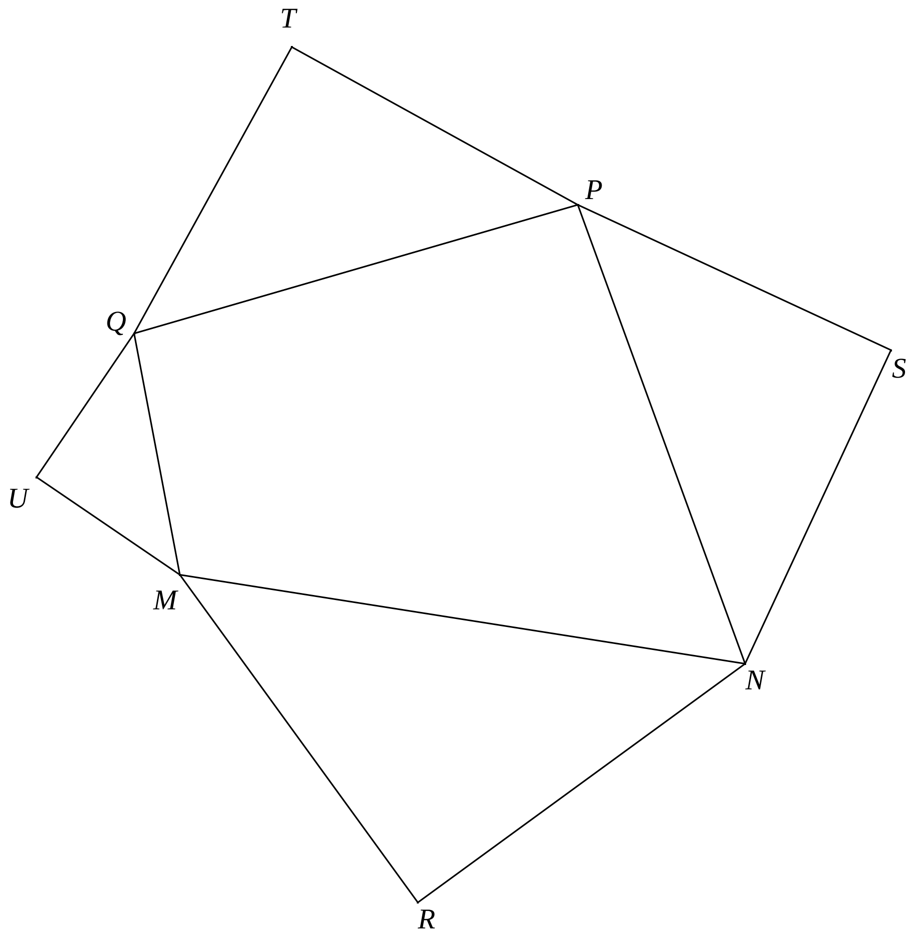
b. Que peut-on en déduire pour les longueurs des segments $[RT]$ et $[SU]$, d'une part, et pour les droites (RT) et (SU), d'autre part ?

Partie B

Cette partie sera traitée sans utilisation des nombres complexes.

1. Démontrer, en utilisant les résultats établis dans la partie A, qu'il existe une unique rotation g qui transforme R en S et T en U.

2. Décrire comment construire géométriquement le point Ω, centre de la rotation g. Réaliser cette construction sur la figure.



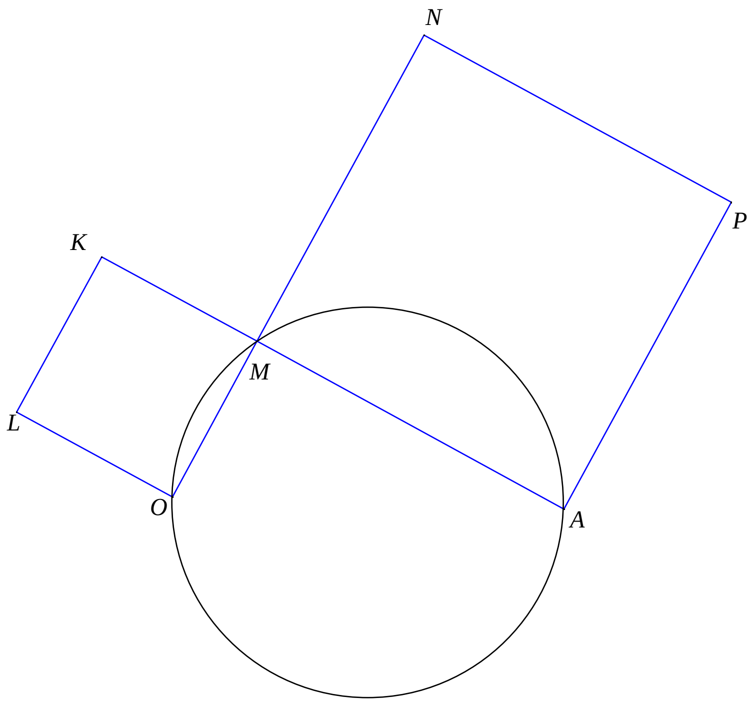
Exercice 2 (5 points,)

Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle C de diamètre $[OA]$, un point M variable appartenant au cercle C et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct $MAPN$ et $MKLO$. La figure est représentée ci-dessus.

Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de montrer que le point N appartient à un cercle à déterminer.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On note k, l, m, n et p les affixes respectives des points K, L, M, N et P.



1. Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle C, on a $\left|m-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

2. Établir les relations suivantes : $l = im$ et $p = -im + 1 + i$.

On admettra que l'on a également $n=(1-i)m+i$ et $k=(1+i)m$.

3. a. Démontrer que le milieu Ω du segment $[PL]$ est un point indépendant de la position du point M sur le cercle C.

b. Démontrer que le point Ω appartient au cercle C et préciser sa position sur ce cercle.

4. a. Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.

b. Quelle est la nature du triangle ΩNK ?

5. Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 3 (5 points)

Pour les questions 1 et 2, on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à 10^{-3} près.

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1. Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie.

On considère les événements suivants :

C_1 : "L'enfant choisit la boîte cubique",

C_2 : "L'enfant choisit la boîte cylindrique",

R : "L'enfant prend une bille rouge",

V : "L 'enfant prend une bille verte".

a. Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.

b. Calculer la probabilité de l'événement R.

c. Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?

3. L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.

a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.

b. Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0,99$.

Exercice 4 (6 points)

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}$.

a. Démontrer que $f(x)=\dfrac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}$.

b. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Étudier les variations de la fonction f.

PARTIE B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle (E_1) $y'=\dfrac{y}{4}$.

1. a. Résoudre l'équation différentielle (E_1).

b. Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.

c. Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) : \begin{cases} u'(t)=\dfrac{u(t)}{4}-\dfrac{u(t)^2}{12} \\ u(0)=1 \end{cases}$$

pour tout nombre réel t positif ou nul, où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a. On suppose que, pour tout réel positif *t*, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction *h* définie par $h = \frac{1}{u}$. Démontrer que la fonction *u* satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction *h* satisfait aux conditions (E_2) : $\begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \\ h(0) = 1 \end{cases}$ pour tout nombre réel *t* positif ou nul, où *h'* désigne la fonction dérivée de la fonction *h*.

b. Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction *h*, puis celle de la fonction *u*.

c. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque *t* tend vers $+\infty$?

CORRECTION SUJET 15 Inscrivez –vous au groupe al Kashi ou acheter le livre

17ieme EPREUVE

Exercice 1 (3 points)

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par a et b. 2 % des montres fabriquées présentent le défaut a et 10 % le défaut b.

Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les évènements suivants :

A : « la montre tirée présente le défaut a » ;

B : « la montre tirée présente le défaut b » ;

C : « la montre tirée ne présente aucun des deux défauts » ;

D : « la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».

On suppose que les évènements A et B sont indépendants.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,882.
2. Calculer la probabilité de l'évènement D.
3. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres. On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts a et b. On définit l'évènement E : « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ».

Calculer la probabilité de l'évènement E. On en donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice 2 (5 points,)

Pour chacune des cinq questions, une seule des trois propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(3\,;1\,;3)$ et $B(-6\,;2\,;1)$.

Le plan P admet pour équation cartésienne $x+2y+2z=5$.

1. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=2$ est :

   a. un plan de l'espace ; b. une sphère ; c. l'ensemble vide.

2. Les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan P sont :

   a. $\left(\frac{11}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ b. $\left(\frac{8}{3};\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$ c. $\left(\frac{7}{3};-\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$.

3. La sphère de centre B et de rayon 1 :

   a. coupe le plan P suivant un cercle ; b. est tangente au plan P ; c. ne coupe pas le plan P.

4. On considère la droite D de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(1;2;-1)$ et la droite D' d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 3+t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Les droites D et D' sont :

a. coplanaires et parallèles ; b. coplanaires et sécantes ; c. non coplanaires.

5. L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est :

a. la droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -\frac{3}{2} - t \\ y = \frac{3}{2} - 7t \\ z = 2+t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$,

b. le plan d'équation cartésienne $9x - y + 2z + 11 = 0$,

c. le plan d'équation cartésienne $x + 7y - z - 7 = 0$.

Exercice 2 (5 points, TLE C)

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 = 14$, $u_{n+1} = 5u_n - 6$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n (\text{modulo } 4)$. En déduire que pour tout entier naturel k,

$$u_{2k} \equiv 2 (\text{modulo } 4) \text{ et } u_{2k+1} \equiv 0 (\text{modulo } 4).$$

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28 (\text{modulo } 100)$.

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Exercice 3 (7 points)

La page annexe sera à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. a. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

b. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0 ; +\infty[$.

On note α_n cette solution. On a donc : pour tout entier naturel n, $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.

b. Sur la page annexe, on a tracé Γ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

c. Préciser la valeur de α_1.

d. Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.

3. a. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.

b. Étudier les variations de la fonction h définie sur]0 ; $+\infty$ [par $h(x) = \ln x - x + 1$.

En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ.

c. Tracer Δ sur le graphique de la page annexe. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\frac{n+1}{2} \leq \alpha_n$.

4. Déterminer la limite de la suite (α_n).

Partie B

On considère une fonction g continue, strictement croissante sur]0 ;$+\infty$[et telle que $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

On admet que l'on peut, comme on l'a fait dans la **partie A**, définir sur $\mathbb{N}$ une suite (β_n) de réels tels que $g(\beta_n) = n$, et que cette suite est strictement croissante.

1. Démonstration de cours :

Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.

« Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

2. Montrer que la suite (β_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 4 (5 points)

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique : 2 cm.

1. On rappelle que, pour tous nombres complexes a et b, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^3 = 8$.

2. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c définies par : $a = 2$, $b = -1 + i\sqrt{3}$ et $c = -1 - i\sqrt{3}$.

On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $B' = r'(B)$ et $C' = r(C)$ et on note b' et c' les affixes respectives de B' et C'.

a. Placer les points A, B et C dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Dans la suite de l'exercice, on complètera cette figure.

b. Montrer que $b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$.

c. Montrer que b' et c' sont des nombres conjugués.

3. On appelle M, N, P et Q les milieux respectifs des segments [CB], [BB'], [$B'C'$] et [$C'C$]. On note m, n, p et q leurs affixes.

a. Montrer que l'affixe n du point N est égale à $\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$. En déduire que les points O, N et C sont alignés.

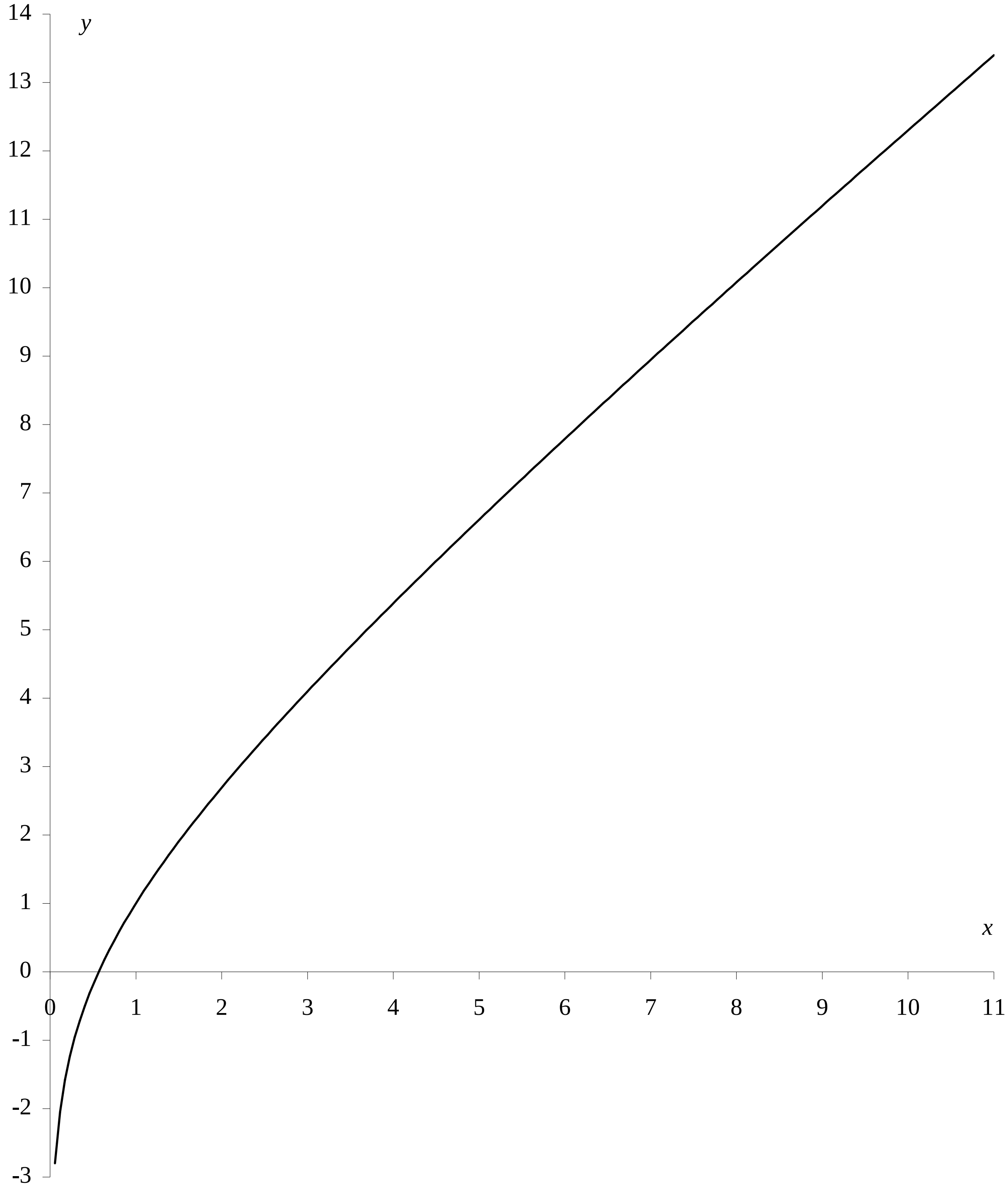
b. Montrer que $n + 1 = i(q + 1)$. Que peut-on en déduire pour le triangle MNQ ?

c. Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un carré.

Page annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Exercice 3



CORRIGE DU 17ieme sujet

Correction épreuve 17 Inscrivez –vous au groupe al Kashi ou acheter le livre si non ,on vous propose ceci

Exercice 1 (3 points)

1. Comme A et B sont indépendants on a $p(A\cap B)=p(A)p(B)=0,02\times 0,1$; on en déduit donc que $p(C)=1-p(A\cup B)=1-\left[p(A)+p(B)-p(A\cap B)\right]=1-0,02-0,1+(0,02\times 0,1)=0,882$.

2. Il y a 0,02 – 0,002 = 0,018 chances de tomber sur une montre n'ayant que le défaut a ; de même il y a 0,1 – 0,002 = 0,098 chances de tomber sur une montre n'ayant que le défaut b ; on a donc $p(D)=0,018+0,098=0,116$.

3. X suit une loi binomiale $B(5\,;0,882)$;

$$p(E)=p(X\geq 4)=p(X=4)+p(X=5)=\binom{5}{4}0,882^4 0,118^1+\binom{5}{5}0,882^5 0,118^0\approx 0,891 .$$

DIX-HUITIÈME ÉPREUVE

Sujet 18

Exercice 1 (4 points)

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes et sont notées sur un point chacune.

Pour chaque question, il y a exactement deux propositions correctes. Le candidat doit indiquer sur sa copie les deux propositions vraies. Aucune justification n'est demandée.

Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point, chaque réponse fausse enlève 0,25 point. Donner trois propositions ou plus d'une question, ou bien n'en donner aucune, ne rapporte aucun point. Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

1. Les suites suivantes sont convergentes :

a. $\left(\dfrac{2^n}{n^{2005}}\right)_{n>0}$ b. $\left(\dfrac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ c. $\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)_{n>0}$ d. $\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)_{n>1}$

2. On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) ayant, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :
$u_n\leq v_n\leq w_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=-1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n)=1$.

Alors :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)=0$.

b. La suite (u_n) est minorée.

c. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $-1\leq v_n\leq 1$.

d. On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.

3. Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases}u_0=1,5\\ u_{n+1}=2u_n-1\end{cases}$ pour tout entier naturel n.

a. La suite (u_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = 2x - 1$.

b. La suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$, est géométrique.

c. La suite (v_n) est majorée.

d. La suite (w_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln(u_n - 1)$, est arithmétique.

4. Deux suites (x_n) et (y_n) sont définies pour $n > 0$ par les relations :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \text{ et } y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

a. Les suites (x_n) et (y_n) sont toutes les deux croissantes.

b. $x_3 = \frac{19}{20}$ et $y_3 = \frac{37}{60}$.

c. Les suites (x_n) et (y_n) ne sont pas majorées.

d. Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

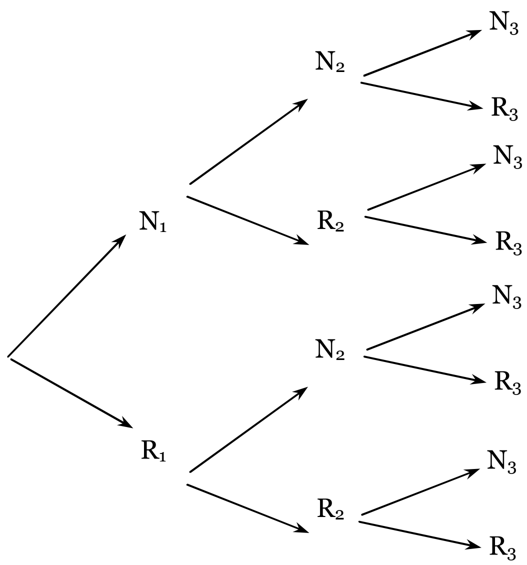
Exercice 2 (5 points,)

On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3.

L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3. Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i, (respectivement R_i) l'évènement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant



2. a. Calculer la probabilité des évènements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$, et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.

b. En déduire la probabilité de l'évènement $N_1 \cap N_3$.

c. Calculer de façon analogue la probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_3$.

3. Déduire de la question précédente la probabilité de l'évènement N_3.

4. Les évènements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?

5. Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Exercice 2 (5 points, Tle c)

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :

« Étant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si PGCD(a ; b) = 1 alors PGCD(a^2 ; b^2) = 1 ».

Une suite (S_n) est définie pour n >0 par $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1. Démontrer que, pour tout n > 0, on a : $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. Étude du cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$.

a. Démontrer que $\text{PGCD}(S_{2k}\ ; S_{2k+1}) = (2k+1)^2\ \text{PGCD}(k^2\ ; (k+1)^2)$.

b. Calculer PGCD (k ; k +1).

c. Calculer PGCD(S_{2k} ; S_{2k+1}).

3. Étude du cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k +1$.

a. Démontrer que les entiers $2k$ +1 et $2k$ +3 sont premiers entre eux.

b. Calculer PGCD(S_{2k+1} ; S_{2k+2}).

4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice 3 (4 points)

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(\text{C}) \begin{cases} f(-x)f'(x) = 1 \text{ pour tout nombre réel } x, \\ f(0) = -4 \end{cases}$$

(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de trouver cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x)f(x)$.

a. Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la fonction dérivée de la fonction g .

c. En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.

d. On considère l'équation différentielle (E) $y' = \frac{1}{16}y$. Montrer que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie f (0)=−4.

2. **Question de cours :**

a. On sait que la fonction $x \to e^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \to Ke^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque.

b. Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur −4 en 0.

3. Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.

Exercice 4 (4 points)

On appelle hauteur d'un tétraèdre toute droite contenant l'un des sommets de ce tétraèdre et perpendiculaire au plan de la face opposée à ce sommet. Un tétraèdre est *orthocentrique* si ses quatre hauteurs sont concourantes.

Partie A

On considère un tétraèdre $ABCD$ et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre $ABCD$ issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on donne les points $A(3\ ;\ 2\ ;\ -1)$, $B(-6\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $C(4\ ;-3\ ;\ 3)$ et $D(-1\ ;\ -5\ ;\ -1)$.

1. a. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est : $-2x -3y +4z -13 = 0$.

b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CD}$.

d. Le tétraèdre $ABCD$ est-il orthocentrique ?

2. On définit les points $I(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $J(0;\ 1;\ 0)$, $K(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$. Le tétraèdre $OIJK$ est-il orthocentrique ?

Exercice 5 (3 points)

L'exercice comporte une annexe à rendre avec la copie.

On considère les fonctions f et g définies, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, par $f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x) = e^x - 1$. On désigne par C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Ces courbes sont tracées sur la feuille annexe, dont le candidat disposera comme il le jugera utile ; cette annexe sera à joindre à la copie, avec les éventuels ajouts effectués par le candidat,

1. Vérifier que les courbes C_f et C_g ont une tangente commune au point $O(0\ ;\ 0)$. Préciser la position de la courbe C_f par rapport à cette tangente.

2. Démontrer que les courbes C_f et C_g sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

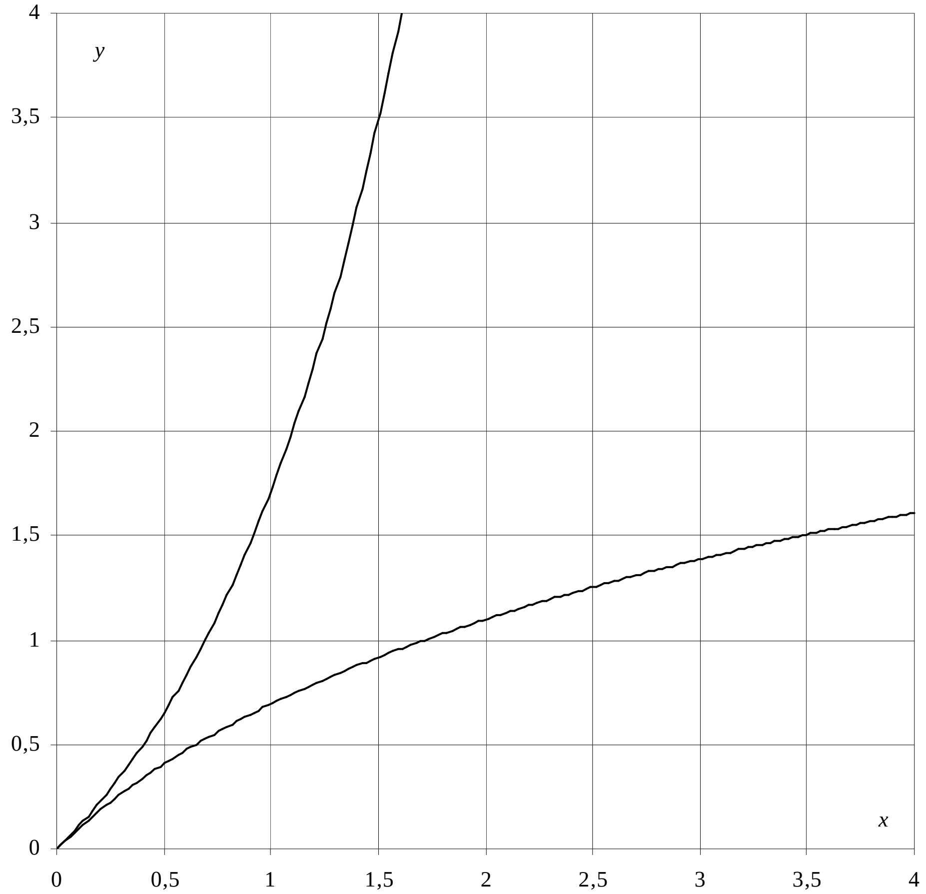
3. Soit a un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer de deux façons différentes le nombre $I(a) = \int_0^a \ln(x+1)dx$.

a. En utilisant des considérations d'aires, démontrer que $I(a) = a\ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1)dx$.

b. En déduire la valeur de $I(a)$.

c. Retrouver la valeur de $I(a)$ en effectuant une intégration par parties.

Courbes de l'exercice 5



ÉPREUVE 19

DIX-NEUVIEME EPREUVE

Exercice 1 (4 points)

L'exercice comporte 4 questions. Pour chaque question, on propose 3 affirmations. Pour chacune d'elles, le candidat doit indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.

Les réponses à cet exercice sont à inscrire sur la feuille jointe en annexe. Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse. Chaque réponse exacte rapporte 0,25 point. Une bonification de 0,25 point est ajoutée chaque fois qu'une question est traitée correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 3 affirmations sont exactes). 2 réponses inexactes dans une même question entraînent le retrait de 0,25 point.

L'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans l'exercice, le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$.

Q1	Pour tout n entier naturel non nul, pour tout réel θ, $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est égal à :	$e^{in\theta}$	☐Faux ☐ Vrai
		$\cos\left(\theta^n\right)+i\sin\left(\theta^n\right)$	☐Faux ☐ Vrai
		$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$	☐Faux ☐ Vrai
Q2	La partie imaginaire du nombre z est égale à :	$\frac{z+\bar{z}}{2}$	☐Faux ☐ Vrai
		$\frac{z-\bar{z}}{2i}$	☐Faux ☐ Vrai
		$\frac{z-\bar{z}}{2}$	☐Faux ☐ Vrai
Q3	Soit z un nombre complexe tel que $z=x+iy$ (x et y réels). Si z est un imaginaire pur, alors $\lvert z\rvert^2$ est égal à :	y^2	☐Faux ☐ Vrai
		$-y^2$	☐Faux ☐ Vrai
		$-z^2$	☐Faux ☐ Vrai
Q4	A, B et C sont des points d'affixes respectives a, b et c telles que $\frac{b-a}{c-a}=i\sqrt{3}$, alors :	$BC=2AC$	☐Faux ☐ Vrai
		$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$	☐Faux ☐ Vrai
		$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA^2$	☐Faux ☐ Vrai

Exercice 2 (5 points)

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.

Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.

Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros. Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude.

Soit X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i-ème trajet et la valeur 0 sinon. Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{40}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Dans cette partie on suppose que $p=\frac{1}{20}$.

   a. Calculer l'espérance mathématique de X.

   b. Calculer les probabilités $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.

   c. Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.

3. Soit Z_i la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur.

Justifier l'égalité $Z = 400 - 100X$ puis calculer l'espérance mathématique de Z pour $p=\frac{1}{5}$.

4. On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99%.

a. Démontrer que $P(X \leq 2) = (1-p)^{38}\left(741p^2 + 38p + 1\right)$.

b. Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = (1-x)^{38}\left(741x^2 + 38x + 1\right)$.

Montrer que f est strictement décroissante sur [0 ; 1] et qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle [0 ; 1] tel que $f(x_0) = 0{,}01$. Déterminer l'entier naturel n tel que $\frac{n}{100} < x_0 < \frac{n+1}{100}$.

c. En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99%. (On exprimera p en fonction de x_0).

Exercice 3 (6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur]−1 ; +∞ [par :

$$f(x) = x^2 - 2{,}2x + 2{,}2\ln(x+1).$$

1. Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-2 \leq x \leq 4$, $-5 \leq y \leq 5$.

Reproduire sur la copie l'allure de la courbe obtenue grâce à la calculatrice.

2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :

a. Sur les variations de la fonction f ?

b. Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?

3. On se propose maintenant d'étudier la fonction f.

a. Étudier le sens de variation de la fonction f.

b. Étudier les limites de la fonction f en −1 et en $+\infty$, puis dresser le tableau de variations de f.

c. Déduire de cette étude, en précisant le raisonnement, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

d. Les résultats aux questions 3. a. et 3. c. confirment-ils les conjectures émises à la question 2.?

4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle [−0,1 ; 0,2], de façon à visualiser les résultats de la question 3.

a. Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée y proposez-vous pourmettre en évidence les résultats de la question 3. c. dans la fenêtre de votre calculatrice ?

b. À l'aide de la calculatrice determiner une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de la plus grande solution α de l'équation $f(x) = 0$.

5. Soit F la fonction définie sur]−1 ; +∞ [par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1{,}1x^2 - 2{,}2x + 2{,}2(x+1)\ln(x+1)$.

a. Démontrer que F est une primitive de f sur]−1 ; +∞[.

b. Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_0^{\alpha} f(x)dx$

c. Calculer $\int_0^{\alpha} f(x)dx$ et exprimer le résultat sous la forme $b\alpha^3 + c\alpha^2$ (b et c réels).

Exercice 4 (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

PARTIE A

Étant donnés deux points distincts A_0 et B_0 d'une droite, on définit les points : A_1 milieu du segment $[A_0B_0]$ et B_1 barycentre de $\{(A_0, 1) ; (B_0, 2)\}$.

Puis, pour tout entier naturel n, A_{n+1} milieu du segment $[A_nB_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(A_n, 1) ; (B_n, 2)\}$.

1. Placer les points A_1 , B_1, A_2 et B_2 pour $A_0B_0 = 12$ cm.

Quelle conjecture peut-on faire sur les points A_n et B_n quand n devient très grand ?

2. On munit la droite (A_0B_0) du repère $\left(A_0 ; \vec{i}\right)$ avec $\vec{i} = \frac{1}{12}\overrightarrow{A_0B_0}$.

Soit u_n et v_n les abscisses respectives des points A_n et B_n. Justifier que pour tout entier naturel n strictement positif, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

PARTIE B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$; $v_0 = 12$; $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.
3. Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.
4. On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$. Montrer qu'elle est constante.

PARTIE C

À partir des résultats obtenus dans les parties A et B, préciser la position limite des points A_n et B_n quand n tend vers $+\infty$.

CORRIGÉ EPREUVE 19

Correction SUJET 19

Exercice 1 (4 points)

Q1	Pour tout n entier naturel	$e^{in\theta}$	Vrai : cours.

	non nul, pour tout réel θ, $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est égal à :	$\cos\left(\theta^n\right)+i\sin\left(\theta^n\right)$	Faux : bof…
		$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$	Vrai : cours.
Q2	La partie imaginaire du nombre z est égale à :	$\frac{z+\bar{z}}{2}$	Faux : $\frac{z+\bar{z}}{2}=\frac{1}{2}(x+iy+x-iy)=x$.
		$\frac{z-\bar{z}}{2i}$	Vrai :on a $\sin\theta=\frac{z-\bar{z}}{2i}=y$.
		$\frac{z-\bar{z}}{2}$	Faux : $\frac{z-\bar{z}}{2}=\frac{1}{2}(x+iy-x+iy)=iy$.
Q3	Si z est un imaginaire pur, alors $\lvert z\rvert^2$ est égal à :	y^2	Vrai : $\lvert z\rvert^2=\lvert iy\rvert^2=\lvert i\rvert^2\lvert y\rvert^2=y^2$.
		$-y^2$	Faux : $\lvert i\rvert^2=1\neq i^2=-1$.
		$-z^2$	Vrai : comme z est imaginaire pur, on a $\lvert z\rvert^2=\lvert iy\rvert^2=y^2$ et $-z^2=-(iy)^2=y^2$.
Q4	A, B et C sont des points d'affixes respectives a, b et c telles que $\frac{b-a}{c-a}=i\sqrt{3}$, alors :	$BC=2AC$	Vrai : d'un côté on a $\frac{BA}{AC}=\frac{\lvert b-c\rvert}{\lvert c-a\rvert}=\lvert i\sqrt{3}\rvert=\sqrt{3}\Rightarrow BA=AC\sqrt{3}$; par ailleurs le triangle ABC est rectangle en A d'où $AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow 4AC^2=BC^2$.
		$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$	Faux : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\arg\frac{c-a}{b-a}=\arg\frac{1}{i\sqrt{3}}$ $=\arg\frac{-i}{\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{2}$
		$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA^2$	Vrai : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA^2=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}.\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)=0$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow(CA)\perp(AB)$.

Exercice 2 (5 points)

1. Chaque variable X_i est l'indicatrice de l'évènement A : Claude est contrôlé ; on a $P(X_i=1)=P(A)=p$ et $P(X_i=0)=P(\bar{A})=1-p$. La somme de toutes ces v.a. donne une loi binomiale de paramètres n = 40 et p.

2. $p=\frac{1}{20}$.

a. Le cours nous donne $E(X)=np=\frac{40}{20}=2$.

b. $P(X=k)=\binom{n}{k}\frac{1}{20^k}\left(\frac{19}{20}\right)^{n-k}$ d'où $P(X=0)=\left(\frac{19}{20}\right)^{40}$, $P(X=1)=40\frac{1}{20}\left(\frac{19}{20}\right)^{40-1}=2\left(\frac{19}{20}\right)^{39}$ et $P(X=2)=\frac{40(40-1)}{2}\frac{1}{20^2}\left(\frac{19}{20}\right)^{40-2}=\frac{39}{20}\left(\frac{19}{20}\right)^{38}$.

c. On cherche $P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\left(\frac{19}{20}\right)^{40}+2\left(\frac{19}{20}\right)^{39}+\frac{39}{20}\left(\frac{19}{20}\right)^{38}\approx 0{,}6767$.

3. Z_i = gain algébrique réalisé par le fraudeur : Claude fraude 40 fois un ticket à 10 €, il gagne donc 400 € ; s'il est contrôlé X fois, il perd $100X$, d'où son « gain » est $Z = 400 - 100X$.

Z suit évidemment la même loi que X ; pour $p=\frac{1}{5}$ et n = 40, on a $E(X)=np=8$ d'où $E(Z)=400-800=-400$.

4. a. On reprend ce qui a été fait précédemment :

$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=(1-p)^{40}+40p(1-p)^{39}+\frac{40.39}{2}p^2(1-p)^{38}$ d'où en mettant $(1-p)^{38}$ en facteur :

$$P(X\le 2)=(1-p)^{38}\left[(1-p)^2+40p(1-p)+780p^2\right]=(1-p)^{38}\left(1-2p+p^2+40p-40p^2+780p^2\right)$$
$$=(1-p)^{38}\left(1+38p+741p^2\right).$$

b. On peut chercher la dérivée :

$$f'(x)=-38(1-x)^{37}\left(741x^2+38x+1\right)+(1-x)^{38}(1482x+38)$$
$$=(1-x)^{37}\left[-28158x^2-1444x-38+1482x+38-1482x^2-38x\right]=-29640x^2(1-x)^{37}.$$

f' est bien négative sur [0 ; 1]. Comme $f(0)=1$ et $f(1)=0$, il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle [0 ; 1] tel que $f(x_0)$ = 0,01.

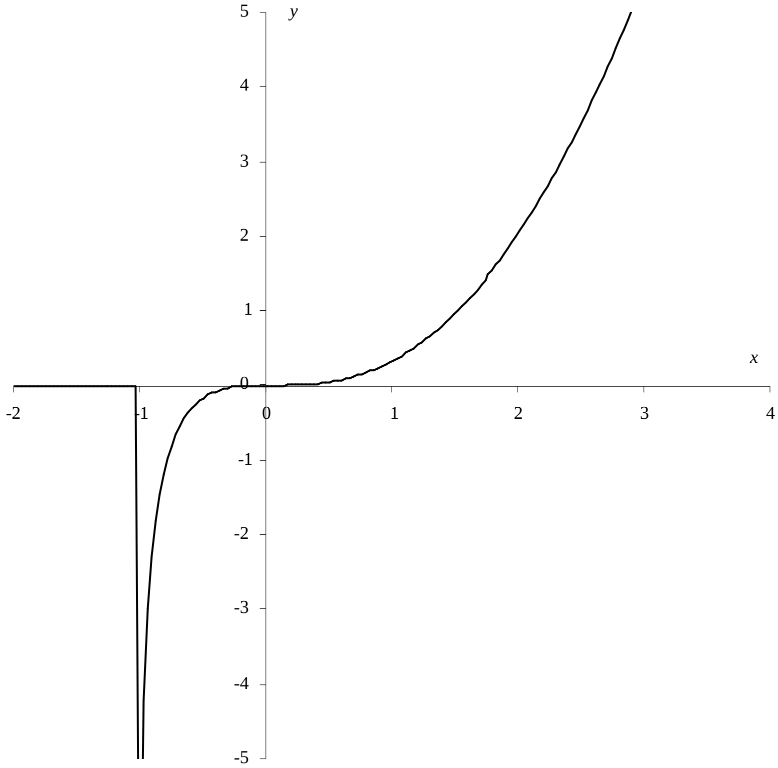
A la calculette on a $f(0{,}19)\approx 0{,}0116$ et $f(0{,}20)\approx 0{,}0079$ d'où $\frac{19}{100}<x_0<\frac{20}{100}$ et n = 19.

c. En fait on cherche $P(X\ge 3)=1-P(X<3)=1-P(X\le 2)$ et on veut que cette probabilité soit supérieure à 0,99, soit que $1-P(X\le 2)\ge 0{,}99 \Leftrightarrow -P(X\le 2)\ge -0{,}01 \Leftrightarrow P(X\le 2)\le 0{,}01$ d'où avec ce que l'on a fait précédemment : $p\ge 0{,}19$. Pratiquement, cela signifie qu'il faut contrôler un passager sur 5 environ (et dans ce cas le « gain » de Claude est de –400 €).

Exercice 3 (6 points)

f sur]–1 ; +∞ [par : $f(x)=x^2-2{,}2x+2{,}2\ln(x+1)$.

1.



2. a. f semble croissante.

b. Il semble n'y avoir qu'une solution à l'équation $f(x) = 0$, mais c'est douteux.

3. a. $f'(x) = 2x - 2,2 + \dfrac{2,2}{x+1} = \dfrac{2x^2 + 2x - 2,2x - 2,2 + 2,2}{x+1} = \dfrac{2x^2 - 0,2x}{x+1} = \dfrac{x(2x - 0,2)}{x+1}$; on a deux racines, 0 et 0,1 ; le signe du trinôme donne f croissante avant 0, décroissante entre 0 et 0,1 puis de nouveau croissante.

x	-1		0		$0,1$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0		
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-0,000$	$\nearrow$	$+\infty$

b. En -1, $\ln(x+1)$ tend vers $-\infty$ de même que f ; en $+\infty$ les croissances comparées donnent le terme x^2 gagnant et f tend vers $+\infty$.

c. f s'annule donc deux fois : en 0 évidemment puis une deuxième fois après 0,1 puisque f est croissante entre 0,1 et $+\infty$ et passe d'un nombre négatif à des valeurs positives.

d. Evidemment non…

4. a. Le minimum est aux environs de −0,0003, et on peut prendre $f(0,2) \approx 0,0011$ en positif.

b. On a $\alpha \approx 0,1517$, soit 0,15 à 10^{-2} près.

5. $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 1,1x^2 - 2,2x + 2,2(x+1)\ln(x+1)$.

a. On dérive F :

$$F'(x) = \frac{1}{3}.3x^2 - 1,1.2x - 2,2 + 2,2\left[1.\ln(x+1) + (x+1)\frac{1}{x+1}\right] = x^2 - 2,2x - 2,2 + 2,2\ln(x+1) + 2,2 = f(x).$$

b. $\int_0^\alpha f(x)dx$ représente l'aire algébrique (ici négative) comprise entre la courbe de *f*, les droites $x=0$ et $x=\alpha$.

c. $\int_0^\alpha f(x)dx = F(\alpha)-F(0)=\frac{1}{3}\alpha^3-1,1\alpha^2-2,2\alpha+2,2(\alpha+1)\ln(\alpha+1)$; comme $f(\alpha)=0$, on a

$$\alpha^2-2,2\alpha+2,2\ln(\alpha+1)=0 \Leftrightarrow 2,2\ln(\alpha+1)=2,2\alpha-\alpha^2,$$

soit

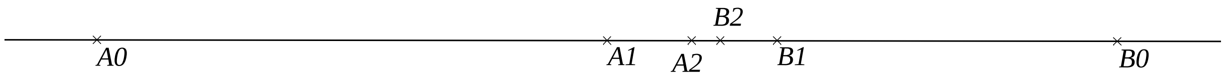
$$\int_0^\alpha f(x)dx=\frac{1}{3}\alpha^3-1,1\alpha^2-2,2\alpha+(\alpha+1)\left(2,2\alpha-\alpha^2\right)=-\frac{2}{3}\alpha^3+0,1\alpha^2.$$

Exercice 4 (5 points)

PARTIE A

A_{n+1} milieu du segment $[A_nB_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(A_n, 1) ; (B_n, 2)\}$.

1.



Même quand n n'est pas très grand, les suites de points convergent vers un point qui semble être à peu près au milieu de $[A_2B_2]$.

2. On a dans ce repère les abscisses suivantes : $u_0=0$ et $v_0=12$.

Si u_n et v_n sont les abscisses des points A_n et B_n, on a $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ car A_{n+1} est le milieu de $[A_nB_n]$ et $v_{n+1}=\frac{1.u_n+2.v_n}{1+2}=\frac{u_n+2v_n}{3}$ car B_{n+1} est le barycentre de $\{(A_n, 1) ; (B_n, 2)\}$.

PARTIE B

1. $w_n=v_n-u_n \Rightarrow w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}-\frac{u_n+v_n}{2}=\frac{2u_n+4v_n-3u_n-3v_n}{6}=\frac{v_n-u_n}{6}$ donc w_n est une suite géométrique de raison 1/6, donc convergente vers 0. Tous ses termes sont positifs car $w_n=w_0\frac{1}{6^n}=\frac{12}{6^n}$.

2. $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+v_n-2u_n}{2}=\frac{v_n-u_n}{2}=\frac{1}{2}w_n>0$ donc (u_n) est croissante ;

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+2v_n-3v_n}{3}=-\frac{1}{3}w_n<0$ donc la suite (v_n) est décroissante.

3. Comme $w_n>0$, on a $u_n<v_n$ donc u_n est croissante majoée, v_n décroissante minorée, les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et sont adjacentes car $\lim\limits_{n\to\infty} w_n=0$; elles ont donc la même limite.

4. $t_{n+1}=2u_{n+1}+3v_{n+1}=2\frac{u_n+v_n}{2}+3\frac{u_n+2v_n}{3}=u_n+v_n+u_n+2v_n=2u_n+3v_n=t_n=\ldots=t_0=2u_0+3v_0=36$.

PARTIE C

Comme u_n et v_n tendent vers la même limite l, en remplaçant dans t_n on a :

$$t_n = 2u_n + 3v_n = 36 \rightarrow 2l + 3l = 5l = 36 \Rightarrow l = \frac{36}{5}.$$

VINGT-IEME EPREUVE ET SA CORRECTION

Exercice 1 (4 points)

Les parties A et B sont indépendantes

Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut.

On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés.

Alain achète 50 composants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-1} près.

2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

3. Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie B

On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5\times10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$ (on pourra se reporter au formulaire ci-dessous).

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures :

a. si ce composant est défectueux ;

b. si ce composant n'est pas défectueux.

Donner une valeur approchée de ces probabilités 10^{-2} près.

2. Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.

Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est :

$$P(T \geq t) = 0,02e^{-5\times10^{-4}t} + 0,98e^{-10^{-4}t}.$$

(on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02).

3. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?

Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

Formulaire :

Loi exponentielle (ou de durée de vie sans vieillissement) de paramètre λ sur $[0\ ;\ +\infty[$:

Pour $0 \leq a \leq b$, $P([a\,;b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\,dx$; pour $c \geq 0$, $P([c\,;+\infty[) = 1 - \int_0^c \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

Exercice 2 (5 points,)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique 2 cm.

Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{4}{\overline{z}}$, où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2. Déterminer l'ensemble des points dont l'image par l'application f est le point J d'affixe 1.

3. Soit α un nombre complexe non nul. Démontrer que le point A d'affixe α admet un antécédent unique par f, dont on précisera l'affixe.

4. a. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

b. Exprimer $|z'|$ en fonction de $|z|$. Si r désigne un réel strictement positif, en déduire l'image par f du cercle de centre O et de rayon r.

c. Choisir un point P du plan complexe non situé sur les axes de coordonnées et tel que OP = 3, et construire géométriquement son image P' par f.

5. On considère le cercle C_1, de centre J et de rayon 1. Montrer que l'image par f de tout point de C_1, distinct de O, appartient à la droite D d'équation $x = 2$.

Exercice 2 (5 points, Tle C)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 4 cm.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = i,\ b = 1 + 2i,\ c = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } d = 3 + 2i.$$

On considère la similitude directe s qui transforme A en B et C en D. Soit M un point d'affixe z et M', d'affixe z', son image par s.

1. Exprimer z' en fonction de z. Déterminer les éléments caractéristiques de s.

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux.

3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude s, les termes dela suite (U_n).

4. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 2^n - 1$.

5. Montrer que, pour tous entiers naturels n et p non nuls tels que $n \geq p$, $U_n = U_p(U_{n-p} + 1) + U_{n-p}$.

La notation pgcd(a ; b) est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels a et b. Montrer pour $n \geq p$ l'égalité

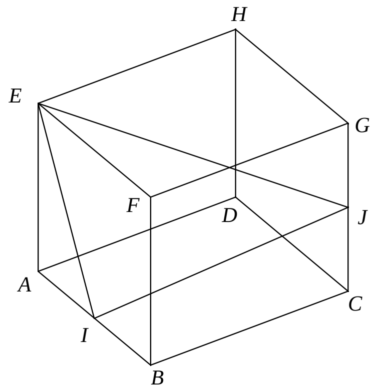
$$\text{pgcd}(U_n, U_p) = \text{pgcd}(U_p, U_{n-p}).$$

6. Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que : $\text{pgcd}(U_n, U_p) = U_{\text{pgcd}(n,\,p)}$. Déterminer le nombre : pgcd(U_{2005}, U_{15}).

Exercice 3 (4 points)

Dans cet exercice, une réponse par « VRAI » ou « FAUX », sans justification, est demandée au candidat en regard d'une liste d'affirmations. Toute réponse conforme à la réalité mathématique donne 0,4 point. Toute réponse erronée enlève 0,1 point. L'absence de réponse n'est pas comptabilisée. Le total ne saurait être négatif.

On donne le cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes [AB] et [CG]. Les éléments utiles de la figure sont donnés ci-contre. Le candidat est appelé à juger chacune des dix affirmations suivantes. **On utilisera pour répondre la feuille annexe, qui sera rendue avec la copie.**



n°	Affirmation	Vrai ou Faux
1	$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}$	
2	$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$	
3	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IC}$	
4	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = AB \times AC \times \cos\frac{\pi}{3}$	

On utilise à présente le repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

n°	Affirmation	Vrai ou Faux
5	Une représentation paramétrique de la droite (*IJ*) est : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$, le paramètre *t* décrivant $\mathbb{R}$.	
6	Une représentation paramétrique de la droite (*IJ*) est : $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t+1 \\ y = t+1 \\ z = \frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \end{cases}$, le paramètre *t* décrivant $\mathbb{R}$.	
7	$6x - 7y + 8z - 3 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (*IJ*).	
8	L'intersection des plans (*FIJ*) et (*ABC*) est la droite passant par *I* et par le milieu de l'arête [*DC*].	
9	Le vecteur de coordonnées $(-4\,;1\,;2)$ est un vecteur normal au plan (*FIJ*).	

10	Le volume du tétraèdre EFIJ est égal à $\frac{1}{6}$.	

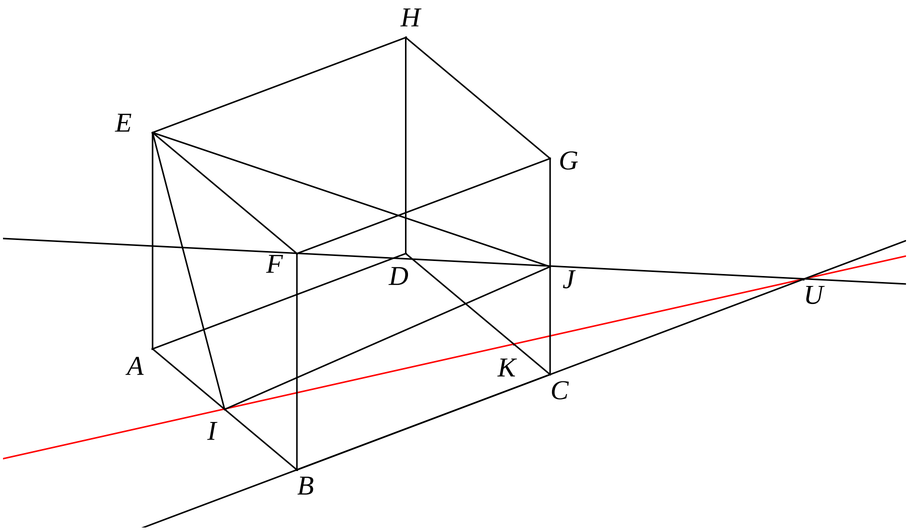
Correction

1. Vrai : la projection orthogonale de C sur (AI) est B, on a donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}=1.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

2. Vrai : même chose qu'au 1.

3. Vrai : dans le plan *ABJ*, *J* se projette en *B* et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}$, et c'est pareil pour *C* dans le plan *ABC*.

4. Vrai : $AB=AC=1$ et $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.



5	Un point de passage est *B* (t = 0) qui n'est pas sur la droite.	F
6	Un point de passage est *J* (t = 0). Les coordonnées de *A*(0 ; 0 ; 0), de $I\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, de $J\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$ d'où un vecteur directeur est $\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$, ok.	V
7	C'est une équation de plan.	F
8	Pour *I* c'est sûr, pour le milieu de [*CD*] c'est faux : (*FJ*) coupe (*BC*) en *U* et (*IU*) coupe (*DC*) en *K* qui n'est pas au milieu de [*CD*].	F
9	$\overrightarrow{FI}=\left(1-\frac{1}{2};0-0;1-0\right)=\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $\overrightarrow{FI}.\left(-4;1\ \ 2\right)=-2+0+2=0$; $\overrightarrow{IJ}=\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{IJ}.\left(-4;1;2\right)=-2+1+1=0$.	V
10	La base est *EFI* qui a pour aire $\frac{1}{2}$, la hauteur est *BC* = 1, donc le volume est $\frac{1}{6}$.	V

Exercice 4 (7 points)

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x^2}$ et $g(x)=x^2e^{-x^2}$.

On note respectivement C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, dont les tracés se trouvent sur la feuille annexe. La figure sera complétée et rendue avec la copie.

1. Identifier C_f et C_g sur la figure fournie (justifier la réponse apportée).
2. Étudier la parité des fonctions f et g.
3. Étudier le sens de variationde f et de g . Étudier les limites éventuelles de f et de g en $+\infty$.
4. Étudier la position relative de C_f et C_g.

Partie B

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)=\int_0^x t^2e^{-t^2}\,dt$.

1. Que représente G pour la fonction g ?
2. Donner, pour $x > 0$, une interprétation de $G(x)$ en termes d'aires.
3. Étudier le sens de variations de G sur $\mathbb{R}$.

On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel x, $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

4. Démontrer, que, pour tout réel x, $G(x)=\frac{1}{2}\left[F(x)-xe^{-x^2}\right]$; (on pourra commencer par comparer les fonctions dérivées de G et de $x\to\frac{1}{2}\left[F(x)-xe^{-x^2}\right]$.

On admet que la fonction F admet une limite finie l en $+\infty$, et que cette limite l est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine A limité par la courbe C_f et les demi-droites $[O\,;\vec{i})$ et $[O\,;\vec{j})$.

5. a. Démontrer que la fonction G admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.

b. Interpréter en termes d'aires le réel $N=\int_0^1\left(1-t^2\right)e^{-t^2}\,dt$.

c. En admettant que la limite de G en $+\infty$ représente l'aire P en unités d'aire du domaine D limité par la demi-droite $[O\,;\vec{i})$ et la courbe C_g justifier graphiquement que :

$$N=\int_0^1\left(1-t^2\right)e^{-t^2}\,dt\geq\frac{l}{2}$$

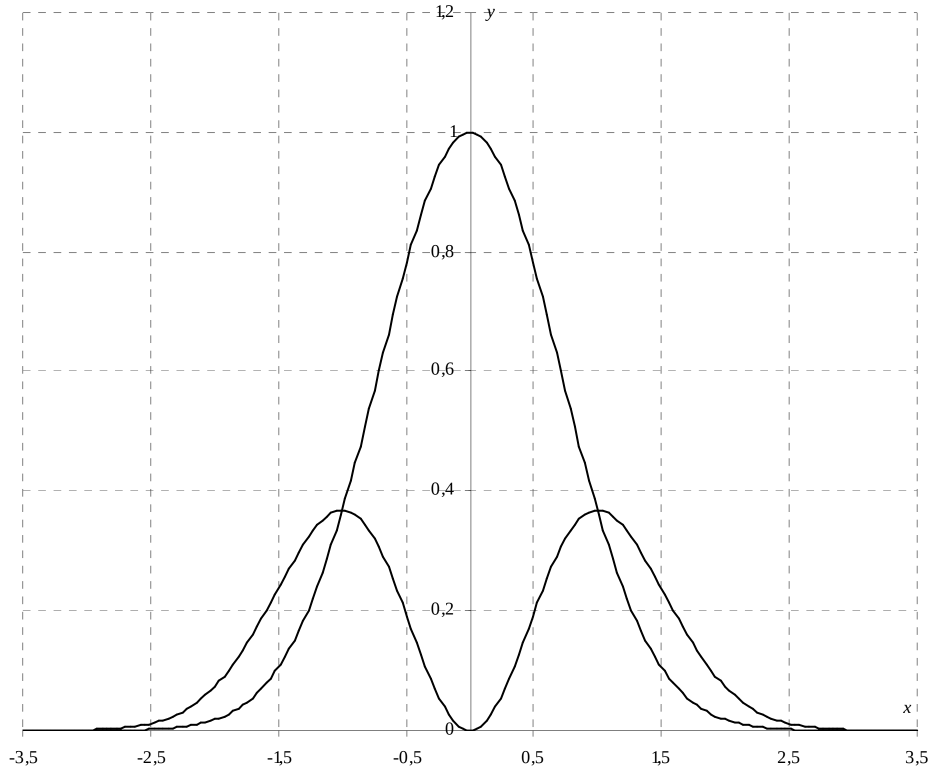
(on pourra illustrer le raisonnement sur la figure fournie).

Document à rendre avec la copie - Annexe

Exercice 3

Affirmation n°	Vrai ou faux
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Exercice 4



21^{ieme} EPREUVE

EPREUVE 21 ET SA CORRECTION

Exercice 1 (5 points, TleC)

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 4 cm

Partie I

1. Placer les points *I, J, H, A, B, C, D* d'affixes respectives : $z_I = 1$, $z_J = i$, $z_H = 1+i$, $z_A = 2$, $z_B = \frac{3}{2}+i$, $z_C = 2i$ et $z_D = -1$

2. Soit *E* le symétrique de *B* par rapport à *H*. La perpendiculaire à la droite (*AE*) passant par *C* et la parallèle à la droite (*OC*) passant par *D* se coupent en *F*.

Placer *E* et *F* et vérifier que le point *F* a pour affixe $z_F = -1+\frac{1}{2}i$.

3. Montrer que les triangles *OAB* et *OCF* sont isométriques.

Partie II

On considère la transformation *f* du plan, d'écriture complexe : $z' = -i\overline{z} + 2i$.

1. Déterminer les images des points *O, A, B* par *f*.
2. a. Montrer que *f* est une similitude. Est-ce une isométrie ?
b. Déterminer l'ensemble des points invariants par *f*.
c. La transformation *f* est-elle une symétrie axiale ?
3. Soit *t* la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Donner l'écriture complexe de *t* et celle de sa réciproque t^{-1}.
4. On pose $s = f \circ t^{-1}$.
a. Montrer que l'écriture complexe de *s* est : $z' = -i\overline{z} + 1 + i$.
b. Montrer que *I* et *J* sont invariants par *s*. En déduire la nature de *s*.
c. En déduire que *f* est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser.

Exercice 1 (5 points,)

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 3 cm

À tout point *M* d'affixe *z* du plan, on associe le point *M'* d'affixe *z'* par l'application *f* qui admet pour écriture complexe : $z' = \dfrac{(3+4i)z+5\overline{z}}{6}$.

1. On considère les points *A, B, C* d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1$ et $z_C = 3i$.
Déterminer les affixes des points *A', B', C'* images respectives de *A, B, C* par *f*. Placer les points *A, B, C, A', B', C'*.
2. On pose $z = x + iy$ (avec *x* et *y* réels). Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de *z'* en fonction de *x* et *y*.
3. Montrer que l'ensemble des points *M* invariants par *f* est la droite (*D*) d'équation $y = \frac{1}{2}x$. Tracer (*D*). Quelle remarque peut-on faire ?
4. Soit *M* un point quelconque du plan et *M'* son image par *f*. Montrer que *M'* appartient à la droite (*D*).
5. a. Montrer que, pour tout nombre complexe *z* : $\dfrac{z'-z}{z_A} = \dfrac{z+\overline{z}}{6} + i\dfrac{z-\overline{z}}{3}$.

En déduire que le nombre $\frac{z'-z}{z_A}$ est réel.

b. En déduire que, si $M' \neq M$, les droites (OA) et (MM') sont parallèles.

6. Un point quelconque N étant donné, comment construire son image N' ? (on étudiera deux cas suivant que N appartient ou non à (D)). Effectuer la construction sur la figure.

Correction **Inscrivez –vous au groupe al Kashi ou acheter le livre**

Exercice 2 (5 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n}, n \geq 2 \end{cases} \text{ et } v_n = u_n - \ln n \text{ pour } n \geq 1.$$

1. a. Calculer u_2, u_3 et u_4.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{k}$.

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a les inégalités suivantes :

$$u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n} \text{ et } 0 \leq v_n \leq 1.$$

c. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

3. Montrer que la suite (v_n) converge. On note γ la limite de la suite (v_n) (on ne cherchera pas à calculer γ).

Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 3 (5 points)

Cet exercice comporte deux parties indépendantes.

La partie I est la démonstration d'un résultat de cours. La partie II est un Q.C.M.

<u>Partie I : Question de cours</u>

Soient A et B deux évènements indépendants. Démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

<u>Partie II</u>

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point, l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total de cette partie est négatif, la note correspondant à la partie II est ramenée à zéro.

1. Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher. On extrait simultanément trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge ?

A	$\frac{75}{512}$	B	$\frac{13}{56}$	C	$\frac{15}{64}$	D	$\frac{15}{28}$

2. Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers d'une population. Parmi les grippés, un sur dix est vacciné. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est 0,25.

Quelle est la probabilité pour un individu vacciné de cette population de contracter la grippe ?

A	$\frac{1}{120}$	B	$\frac{3}{40}$	C	$\frac{1}{12}$	D	$\frac{4}{40}$

3. Un joueur lance une fois un dé bien équilibré.

Il gagne 10 € si le dé marque 1. Il gagne 1 € si le dé marque 2 ou 4. Il ne gagne rien dans les autres cas. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur. Quelle est la variance de X ?

A	2	B	13	C	16	D	17

4. La durée d'attente T , en minutes, à un péage d'autoroute avant le passage en caisse est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{6}$. On a donc pour tout réel t > 0 :

$$P(T < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx \text{ avec } \lambda = \frac{1}{6}$$

où t désigne le temps exprimé enminutes.

Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité (arrondie à 10^{-4} près) que son temps total d'attente soit inférieur à 5 minutes ?

A	0,2819	B	0,3935	C	0,5654	D	0,6065

Exercice 4 : UN CONEJO (5 points)

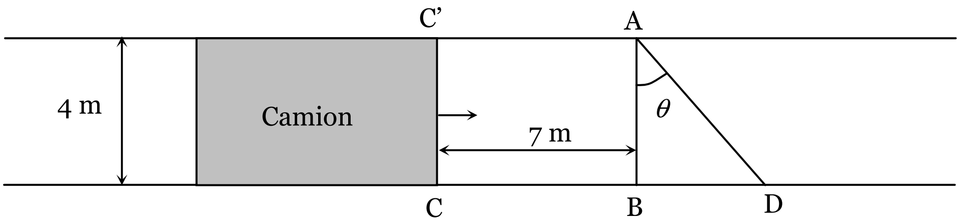
Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui.

Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à . . . 30 km/h !

L'avant du camion est représenté par le segment [CC'] sur le schéma ci-dessous.

Le lapin part du point A en direction de D.

Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (en radians).



1. Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.

2. On pose $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2\tan\theta - \frac{4}{\cos\theta}$.

Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

3. Conclure.

Rappel :

La fonction $x \rightarrow \tan x$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et a pour dérivée la fonction $x \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}$.

Correction

1. On appelle v la vitesse du lapin, et donc $2v$ celle du camion.

$$\frac{AB}{AD}=\cos\theta \Rightarrow AD=\frac{AB}{\cos\theta}=\frac{4}{\cos\theta} \text{ d'où } t_1=\frac{AD}{v_{Lapin}}=\frac{4}{v\cos\theta}.$$

$$\frac{BD}{AB}=\tan\theta \Rightarrow BD=4\tan\theta \text{ d'où } t_2=\frac{CB}{v_{Camion}}+\frac{BD}{v_{Camion}}=\frac{7}{2v}+\frac{4\tan\theta}{2v}.$$

2. Le temps mis par le camion doit être supérieur à celui mis par le lapin (si le lapin veut éviter le camion…), il faut donc

$$t_2>t_1 \Leftrightarrow \frac{7+4\tan\theta}{2v}>\frac{4}{v\cos\theta} \Leftrightarrow \frac{7+4\tan\theta}{2}>\frac{4}{\cos\theta} \Leftrightarrow \frac{7}{2}+2\tan\theta-\frac{4}{\cos\theta}>0 \Leftrightarrow f(\theta)>0.$$

3. A priori on ne sait pas trop résoudre l'inéquation proposée, on va plutôt regarder les variations de *f* :

$$f'(t)=2\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{-4(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}=2\frac{1-2\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

qui s'annule pour $\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$: lorsque $\theta<\frac{\pi}{6}$, $\sin\theta<\frac{1}{2}\Rightarrow f'(\theta)>0$, *f* croissante, $\frac{\pi}{6}$ donne l'abscisse du maximum de *f*, qui est alors de

$$f(\pi/6)=\frac{7}{2}+2\tan\frac{\pi}{6}-\frac{4}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{7}{2}+2\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{8}{\sqrt{3}}\approx 0,036.$$

Comme $f(0)=3,5-4=-0,5<0$ et que $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} f(\theta)=-\infty$, la fonction s'annule deux fois : une première fois vers 0,4, une deuxième vers 0,65 ; le lapin doit donc choisir un angle dans ces zones-là pour avoir une chance de survivre…

On peut essayer de résoudre directement : $f(\theta)=\frac{7}{2}+2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{4}{\cos\theta}=\frac{7\cos\theta+4\sin\theta-8}{2\cos\theta}$;

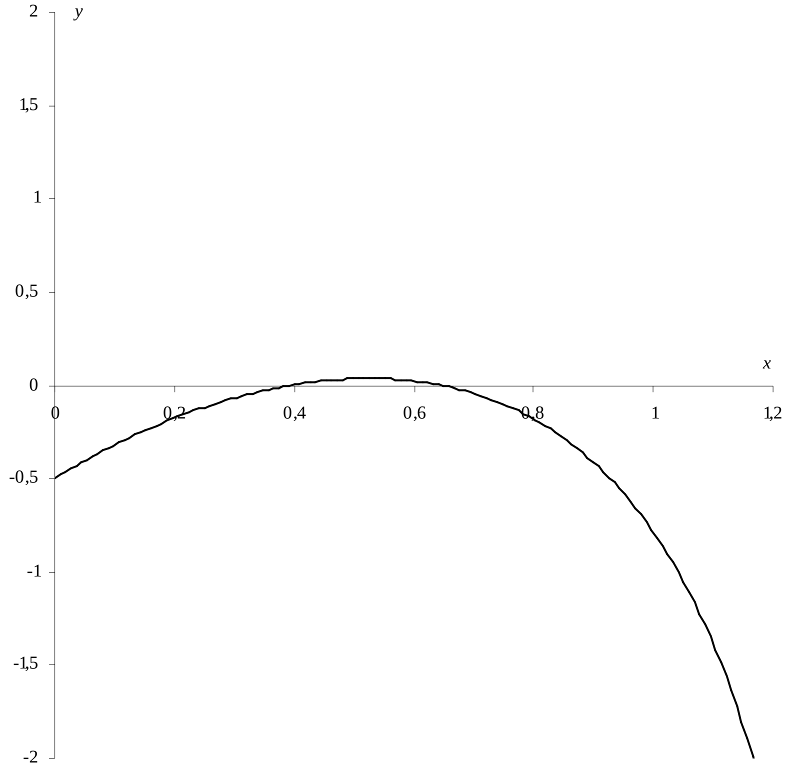
utilisons les formules d'Euler :

$$7\cos\theta+4\sin\theta-8=7\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}+4\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}-8=7\frac{ie^{2i\theta}+i}{2ie^{i\theta}}+4\frac{e^{2i\theta}-1}{2ie^{i\theta}}-8\frac{2ie^{i\theta}}{2ie^{i\theta}}$$

$$=\frac{7ie^{2i\theta}+7i+4e^{2i\theta}-4-16ie^{i\theta}}{2ie^{i\theta}};$$

posons $z=e^{i\theta}$, soit l'équation $7iz^2+7i+4z^2-4-16iz=0 \Leftrightarrow (7i+4)z^2-16iz+7i-4=0$.

$\Delta=(-16i)^2-4(7i+4)(7i-4)=-256-4(-49-16)=\ldots$; on met les solutions sous la forme $e^{i\theta}$, les solutions étant alors l'argument du résultat.



y
x
2
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2

22ieme EPREUVE ET SA CORRECTION

Exercice 1 (7 points)

Partie A

La fonction *f* est définie sur l'intervalle [0 ; $+\infty$ [par $f(x)=(20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}$.

On note *C* la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

1. Étudier la limite de la fonction *f* en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction *f* et dresser son tableau de variations.
3. Établir que l'équation *f*(*x*) = 10 admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle]0 ; $+\infty$ [. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α .
4. Tracer la courbe *C*.
5. Calculer l'intégrale $\int_0^3 f(x)dx$.

Partie B

On note *y*(*t*) la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant *t*, *t* étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant *t* = 0, est *y*(0) = 10.

On admet que la fonction qui, à tout réel *t* appartenant à l'intervalle [0 ; $+\infty$ [associe *y*(*t*), est solution de l'équation différentielle (E) : $y'+\frac{1}{2}y=20e^{-\frac{1}{2}t}$.

1. Vérifier que la fonction *f* étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle [0 ; $+\infty$ [.

2. On se propose de démontrer que cette fonction *f* est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle [0 ; $+\infty$ [, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

a. On note *g* une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur [0 ; $+\infty$ [vérifiant *g*(0) = 10. Démontrer que la fonction *g* – *f* est solution, sur l'intervalle [0 ; $+\infty$ [, de l'équation différentielle (E') : $y'+\frac{1}{2}y=0$.

b. Résoudre l'équation différentielle (E').

c. Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.

4. La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction *f* sur l'intervalle [0 ; 3].

Calculer la valeur exacte de θ, puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

Exercice 2 (5 points,)

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.Aucune justification n'est demandée.

1. Soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$. On a alors :

A : $z^{14} = -128\sqrt{3} - 128i$.

B : $z^{14} = 64 - 64i$.

C : $z^{14} = -64 + 64i\sqrt{3}$.

D : $z^{14} = -128 + 128i\sqrt{3}$.

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, le point S d'affixe 3 et le point T d'affixe 4i. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-3| = |3-4i|$.

A : (E) est la médiatrice du segment [ST].

B : (E) est la droite (ST) ;

C : (E) est le cercle de centre Ω d'affixe 3 − 4i, et de rayon 3 ;

D : (E) est le cercle de centre S et de rayon 5.

3. On considère un hexagone régulier $ABCDEF$, dont les côtés sont de longueur 1. Le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CE}$ est égal à :

A : $\sqrt{3}$.

B : -3.

C : $-\sqrt{3}$.

D : $-\frac{3}{2}$.

4. Une fonction g est définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ par $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-3}$; soit Γ sa courbe représentative dans un repère du plan.

A : Γ admet une asymptote d'équation $y = -1$.

B : Γ n'admet pas d'asymptote.

C : Γ admet une asymptote d'équation $y = x$.

D : Γ admet une asymptote d'équation $y = 1$.

5. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. La fonction f'', dérivée seconde de la fonction f sur $\mathbb{R}$, est définie par :

A : $f''(x) = \int_0^x -2te^{-t^2}\,dt$.

C : $f''(x) = -2xe^{-x^2}$.

B : $f(x) = \int_0^x e^{-x^2}\,dx$.

D : $f''(x) = e^{-x^2}$.

Exercice 2 (5 points, Tle c)

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidatindiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation : $x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod 6$.

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.

B : il n'y a aucune solution.

C : les solutions vérifient $x \equiv 2(6)$.

D : les solutions vérifient $x \equiv 2(6)$ ou $x \equiv 5(6)$.

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (34k-7 ; 5-24k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

B : L'équation (E) n'a aucune solution.

C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (17k-7 ; 5-12k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (-7k ; 5k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Correction Inscrivez –vous au groupe al Kashi ou acheter le livre

3. On considère les deux nombres $n = 1\,789$ et $p = 17\,89^{2005}$. On a alors :

A : $n \equiv 4(17)$ et $p \equiv 0(17)$. C : $p \equiv 4(17)$.

B : p est un nombre premier. D : $p \equiv 1(17)$.

Correction

On a $n = 1\,789 = 4$ modulo 17 ; par ailleurs $4^2 = 16 \equiv -1(17)$ donc $4^{2\times1002+1} \equiv (-1)^{1002} \times 4(17) \equiv 4(17)$. Réponse C.

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse [AB] si et seulement si le point M d'affixe z est tel que :

A : $z = \dfrac{b-ia}{1-i}$. C : $a - z = i(b - z)$.

B : $z - a = e^{i\frac{\pi}{4}}(b-a)$. D : $b - z = \dfrac{\pi}{2}(a-z)$.

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B ; on note I le milieu du segment [AB]. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre I.

A : $h \circ g \circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.

B : $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment [AB].

C : $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.

D : $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 3 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère le plan P passant par le point $B(1 ; -2 ; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-2 ; 1 ; 5)$ et le plan R d'équation cartésienne $x + 2y - 7 = 0$.

a. Démontrer que les plans P et R sont perpendiculaires.

b. Démontrer que l'intersection des plans P et R est la droite Δ passant par le point C(−1 ; 4 ; −1) et de vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -1 ; 1)$.

c. Soit le point $A(5 ; -2 ; -1)$. Calculer la distance du point A au plan P, puis la distance du point A au plan R.

d. Déterminer la distance du point A à la droite Δ .

2. a. Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(1 + 2t\ ;\ 3 - t\ ;\ t)$. Déterminer en fonction de t la longueur AM. On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Étudier le sens de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$; préciser son minimum.

c. Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.

Exercice 4 (3 points)

Partie A

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant une face bleue, deux faces rouges et une face verte ; on suppose le dé parfaitement équilibré.

Une partie consiste à effectuer deux lancers sucessifs et indépendants de ce dé. À chaque lancer on note la couleur de la face cachée.

On considère les évènements suivants :

E est l'évènement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes »,

F est l'évènement « à l'issue d une partie, les deux faces notées sont de la même couleur ».

1. Calculer les probabilités des évènements E et F ainsi que la probabilité de E sachant F.

2. On effectue dix parties identiques et indépendantes. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois l'évènement F au cours de ces dix parties (on en donnera une valeur approchée décimale à 10^{-3} près).

Partie B

On souhaite savoir si le dé utilisé peut être considéré comme parfaitement équilibré. Pour cela on numérote de 1 à 4 les quatre faces de ce dé, puis on lance ce dé 160 fois en notant le nombre n_i de fois où chaque face est cachée ; on obtient les résultats suivants :

face i	1	2	3	4
effectif n_i	30	48	46	32

On note f_i la fréquence relative à la face n_i et d^2_{obs} le réel $\sum_{i=1}^{4}\left(f_i - \frac{1}{4}\right)^2$. On simule ensuite 1 000 fois l'expérience consistant à tirer un chiffre au hasard 160 fois parmi l'ensemble (1 ; 2 ; 3 ; 4) puis, pour chaque simulation, on calcule $d^2 = \sum_{i=1}^{4}\left(F_i - \frac{1}{4}\right)^2$, où F_i est la fréquence d'apparition du nombre i. Le 9ème décile de la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 est égal à 0,0098. Au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10 %, peut-on considérer le dé comme parfaitement équilibré ?

23ieme sujet

Exercice 1 (5 points)

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C. À l'instant 0, la puce est en A.

Pour tout entier naturel n :

- si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant $(n+1)$, elle est : soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$; soit

en C avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$;

- si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant $(n+1)$, elle est : soit en C, soit en A de façon équiprobable ;
- si à l'instant n la puce est en C, alors elle y reste.

On note A_n (respectivement B_n, C_n) l'évènement « à l'instant n la puce est en A » (respectivement en B, en C). On note a_n (respectivement b_n, c_n) la probabilité de l'évènement A_n, (respectivement B_n, C_n).

On a donc : $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$.

Pour traiter l'exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.

1. Calculer a_k , b_k et c_k pour k entier naturel tel que $1 \leq k \leq 3$.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2} b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n. \end{cases}$

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+2} = \frac{1}{6} a_n$.

c. En déduire que, pour tout entier naturel p, $\begin{cases} a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p \text{ et } a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 \text{ et } b_{2p+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^p. \end{cases}$

3. Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. On admet que $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 2 (7 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

Partie A

Dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère la courbe H d'équation $y^2 - x^2 = 16$.

1. Montrer que H est la réunion de deux courbes C et C' où C est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+16}$ et où C' est l'image de C par une transformation simple que l'on précisera.

2. Étudier la fonction f (limites aux bornes de l'ensemble de définition et sens de variation).

a. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote de C.

b. Tracer H dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On nomme A et B les points de la courbe H d'abscisses respectives -3 et 3. On considère le domaine D du plan constitué des points $M(x\,;y)$ vérifiant $-3 \leq x \leq 3$ et $\sqrt{x^2+16} \leq y \leq 5$. Hachurer le domaine D et exprimer l'aire de D à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

Partie B

On appelle r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1. a. Donner l'écriture complexe de r.

b. On désigne par x' et y' les coordonnées du point M', image par r du point $M(x\,;\,y)$ du plan.

Vérifier que $\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \end{cases}$. Déterminer les coordonnées des points A' et B', images respectives de A et B par la rotation r. Placer les points A' et B' dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

2. Soit H' l'hyperbole d'équation $xy = 8$.

a. Tracer H' dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

b. Montrer que H' est l'image de H par la rotation r.

3. Soit D' l'image de D par la rotation r. On admet que D' est l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan vérifiant $\sqrt{2} \le x \le 4\sqrt{2}$ et $\frac{8}{x} \le y \le 5\sqrt{2} - x$.

a. Hachurer D'.

b. Calculer l'aire de D' exprimée en cm². En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de l'aire de D.

Exercice 3 (3 points)

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. Le point M est situé sur le cercle de centre $A(-2\,;\,5)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Son affixe z vérifie :

a. $|z-2+5i|^2 = 3$; b. $|z+2-5i|^2 = 3$; c. $|z-2+5i| = 3$.

2. On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\frac{z-b}{c-a}$ et $\frac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.

a. M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;
b. M appartient aux cercles de diamètres respectifs $[AC]$ et $[AD]$;
c. M est l'orthocentre du triangle ABC.

3. Soit A et B les points d'affixes respectives $1 + i$ et $5 + 4i$, et C un point du cercle de diamètre $[AB]$. On appelle G l'isobarycentre des points A, B et C et on note z_G son affixe.

a. $|z_G - 3 - 2,5i| = \frac{5}{6}$; b. $z_G - (1+i) = \frac{1}{3}(4+3i)$; c. $z_G - (3+2,5i) = \frac{1}{3}(4+3i)$.

Exercice 4 (5 points)

L'annexe se rapporte à cet exercice. Elle sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=e^{-x}\cos(4x)$ et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ ci-dessous. On considère également la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=e^{-x}$ et on nomme C sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $-e^{-x}\leq f(x)\leq e^{-x}$.

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et C.

3. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n=f\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

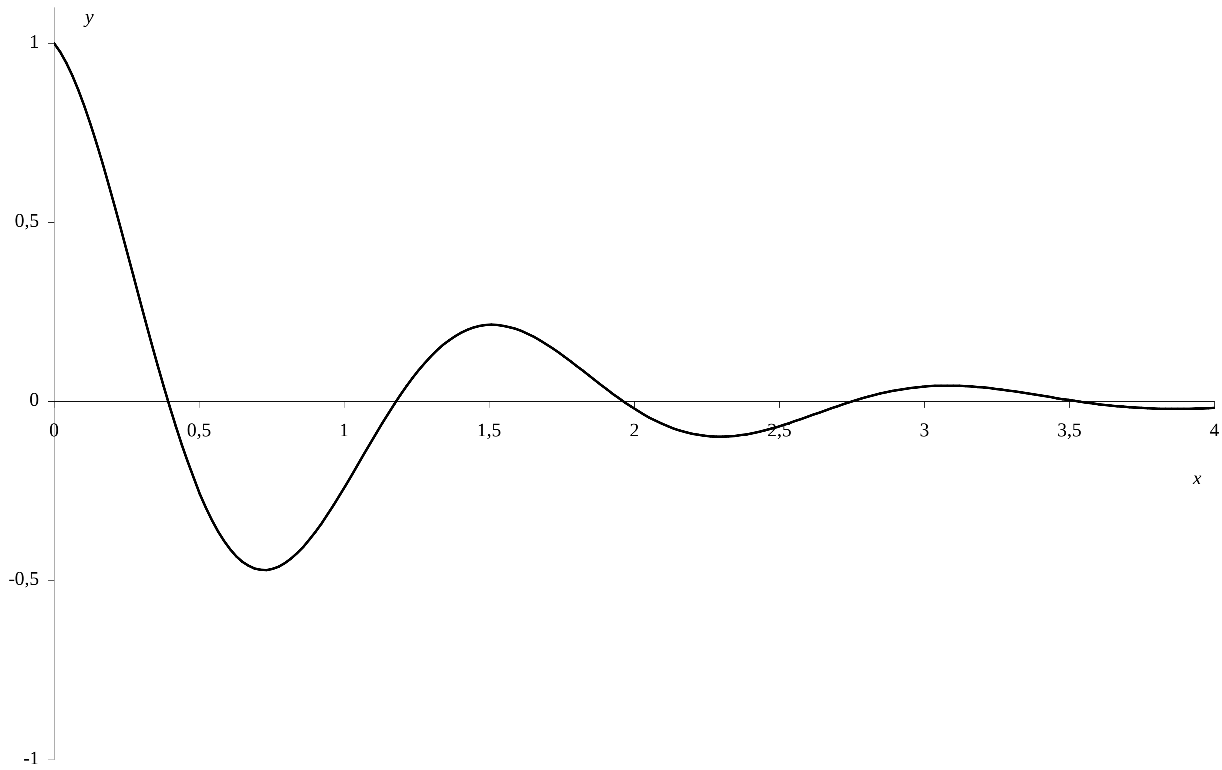
a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.

b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

4. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $f'(x)=-e^{-x}\left[\cos(4x)+4\sin(4x)\right]$.

b. En déduire que les courbes Γ et C ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite T tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$. Compléter le graphique donné en annexe, en y traçant T et C.



EPREUVE 24

Exercice 1

5 points

Partie A Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

1. a. Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.

b. Étudier les variations de la fonction f.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

a. On a tracé la courbe représentative C de la fonction f sur la figure donnée en annexe qui sera rendue avec la copie. Construire la droite d'équation $y = x$ et les points M_1 et M_2 de la courbe C d'abscisses respectives u_1 et u_2. Proposer une conjecture sur le comportement de la suite (u_n).

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq e$ (on pourra utiliser la question 1. b.).

c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel l de l'intervalle $[e\,;\,+\infty[$.

Partie B

On rappelle que la fonction f est continue sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

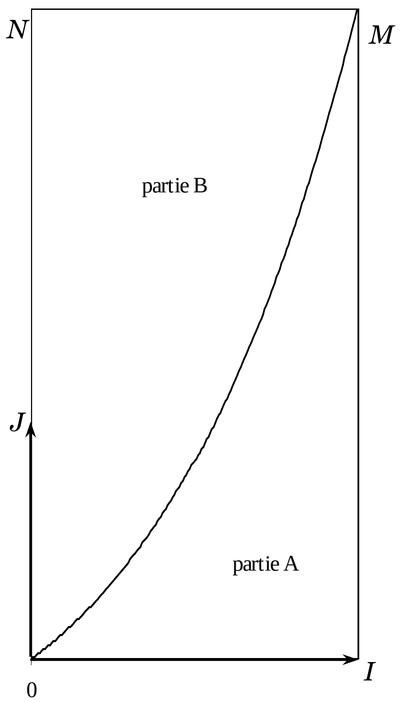
1. En étudiant de deux manières la limite de la suite $[f(u_n)]$, démontrer que $f(l) = l$.

2. En déduire la valeur de l.

Exercice 2

6 points

Première partie : Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$.



Deuxième partie

La figure ci-contre représente une cible rectangulaire *OIMN* telle que, dans le repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$, la ligne courbe C reliant le point O au point M est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

Cette courbe partage la cible *OIMN* en deux parties A et B comme l'indique la figure ci-dessous.

Un jeu consiste à lancer une fléchette qui atteint soit l'extérieur de la cible, soit l'une des parties A ou B. On admet que la fléchette ne peut atteindre aucune des frontières de la cible, ni la courbe C .

Une étude statistique a montré que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et que les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à leurs aires respectives.

1. Démontrer que la probabilité d'atteindre la partie A est égale à $\frac{1}{2e}$. Quelle est la probabilité d'atteindre la partie B ?

2. On lance de manière indépendante trois fléchettes.

a. Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fléchettes ayant atteint la partie A. Définir la loi de probabilité de X. En déduire la valeur exacte de son espérance mathématique.

b. Soit E l'évènement : « Exactement deux fléchettes atteignent la partie A ». Calculer une valeur approchée au millième de la probabilité de E.

c. Soit F l'évènement : « les trois fléchettes atteignent la partie B ». Calculer la probabilité de F (on donnera la valeur exacte).

Sachant qu'aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible, quelle est la probabilité que toutes les trois se trouvent dans la partie B ?

3. On lance cette fois de manière indépendante n fléchettes.

a. Déterminer en fonction de n la probabilité p_n pour qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie A.

b. Déterminer le plus petit naturel n tel que $p_n \geq 0{,}99$.

Exercice 3

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm. On désigne par i le nombre complexe demodule 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$. On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $\frac{z-4}{z}=i$. Écrire la solution sous forme algébrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.
3. Soient A, B, A' et D les points du plan complexe d'affixes respectives : $a = 2$, $b = 4$, $a' = 2i$ et $d = 2 + 2i$.

Quelle est la nature du triangle ODB ?

4. Soient E et F les points d'affixes respectives $e=1-i\sqrt{3}$ et $f=1+i\sqrt{3}$. Quelle est la nature du quadrilatère $OEAF$?
5. Soit C le cercle de centre A et de rayon 2. Soit C' le cercle de centre A' et de rayon 2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

a. On désigne par E' l'image par la rotation r du point E. Calculer l'affixe e' du point E'.

b. Démontrer que le point E' est un point du cercle C'.

c. Vérifier que : $e-d=\left(\sqrt{3}+2\right)\left(e'-d\right)$. En déduire que les points E, E' et D sont alignés.

6. Soit D' l'image du point D par la rotation r. Démontrer que le triangle $EE'D'$ est rectangle.

Exercice 3 (Tle c)

5 points

On complètera la figure donnée en annexe 2 au fur et à mesure des questions, et on la rendra avec la copie.

$ABCD$ est un carré tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=+\frac{\pi}{2}$. Soit I le centre du carré $ABCD$. Soit J le milieu du segment [CD].

On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de la similitude s. Dans la partie A on utilisera des raisonnements géométriques ; dans la partie B on utilisera les nombres complexes.

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.

2. On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre [*AI*], Γ_2 est le cercle de diamètre [*BJ*]. Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2. Placer Ω sur la figure.

3. Donner l'image par *s* de la droite (*BC*). En déduire le point image par *s* du point *C*, puis le point *K* image par *s* du point *I*.

4. On pose $h = s \circ s$ (composée de *s* avec elle même).

a. Donner la nature de la transformation *h* (préciser ses éléments caractéristiques).

b. Trouver l'image du point *A* par *h*. En déduire que les points *A*, Ω et *K* sont alignés.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(A\,;\vec{u},\vec{v})$, choisi de manière à ce que les points *A*, *B*, *C* et *D* aient comme affixes respectives 0, 2, 2 + 2*i* et 2*i*.

1. Démontrer que l'écriture complexe de la similitudes est $z' = \frac{1}{2}iz + 1 + i$.

2. Calculer l'affixe du point Ω.

3. Calculer l'affixe du point *E* tel que *s*(*E*) = *A*. Placer le point *E* sur la figure.

Exercice 4

4 points

Pour chacune des questions 1, 2, 3 et 4, parmi les quatre affirmations proposées, deux sont exactes et deux sont fausses. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et les deux affirmations qu'il pense exactes. Aucune justification n'est demandée. Les quatre questions sont indépendantes et sont notées sur 1 point. Toute réponse juste rapporte 0,5 point. Donner plus de 2 réponses à une question entraîne la nullité de la question.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Soit P le plan d'équation $2x + 3y + 4z - 1 = 0$.

a. La distance du point *O* au plan P est égale à 1.

b. La distance du point *O* au plan P est égale à $\frac{1}{\sqrt{29}}$.

c. Le vecteur $\vec{n}\left(1\,;\frac{3}{2}\,;2\right)$ est un vecteur normal au plan P.

d. Le plan Q d'équation $-5x + 2y + z = 0$ est parallèle au plan P.

2. On désigne par P le plan d'équation $2x + y - z = 0$, et par D la droite passant par le point *A*(1 ; 1 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (1 ; −4 ; −2).

a. La droite D est parallèle au plan P.

b. La droite D est orthogonale au plan P.

c. La droite D est sécante avec le plan P.

d. Un système d'équations paramétriques de D est $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

3. On désigne par E l'ensemble des points *M*(*x* ; *y* ; *z*) tels que : $x + y + z = 3$ et $2x - z = 1$. Soit le point *A*(1 ; 1 ; 1).

a. L'ensemble E contient un seul point, le point *A*.

b. L'ensemble E est une droite passant par *A*.

c. L'ensemble E est un plan passant par *A*.

d. L'ensemble E est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ (1 ; −3 ; 2).

4. *ABCD* est un tétraèdre quelconque. Soit P le plan passant par A et orthogonal à la droite (*BC*).

a. Le plan P contient toujours le point D.

b. Le plan P contient toujours la hauteur (AH) du triangle ABC.

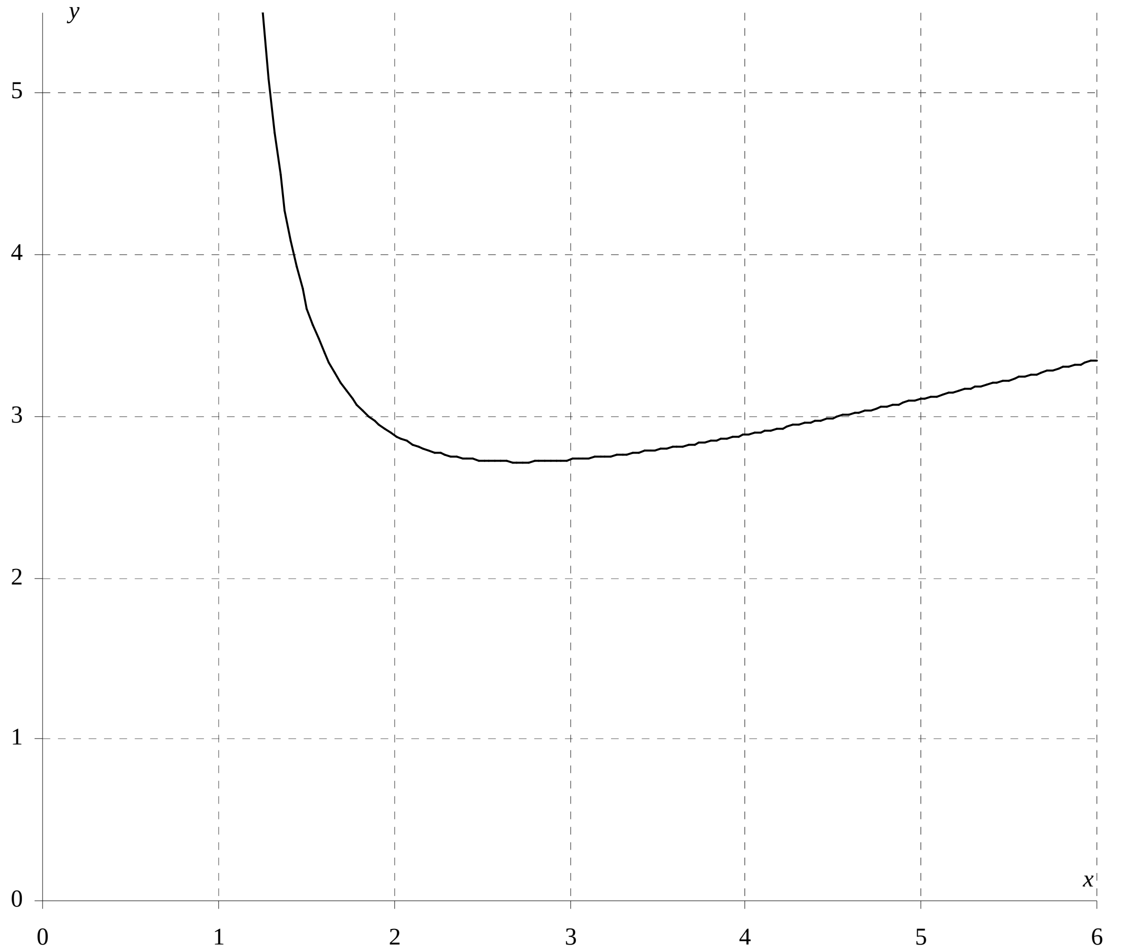
c. Le plan P est toujours l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

d. Le plan P est toujours le plan médiateur du segment [BC].

ANNEXE 1

À compléter et à rendre avec la copie

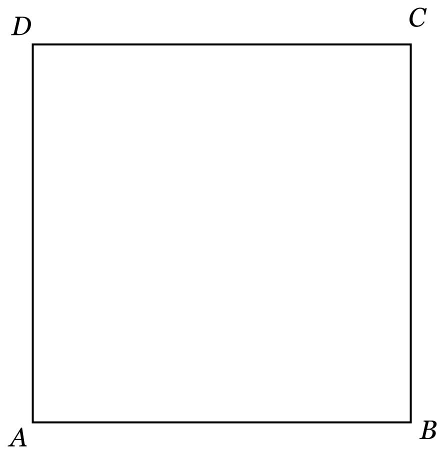
Figure de l'exercice 1



ANNEXE 2

À compléter et à rendre avec la copie

Figure de l'exercice 3



VINGT-CINQUIEME EPREUVE ET SON CORRIGE

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$; unité graphique 2 cm. On appelle *A* et *B* les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$. On considère l'application *f* qui, à tout point *M* différent du point *B*, d'affixe *z*, fait correspondre le point *M'* d'affixe *z'* définie par

$$z' = \frac{z-1}{z+1}.$$

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1. Déterminer les points invariants de *f* c'est-à-dire les points *M* tels que $M = f(M)$.

2. a. Montrer que, pour tout nombre complexe *z* différent de −1, $(z'-1)(z+1) = -2$.

b. En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre arg $(z' - 1)$ et arg $(z + 1)$, pour tout nombre complexe *z* différent de −1. Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.

3. Montrer que si *M* appartient au cercle (C) de centre *B* et de rayon 2, alors *M'* appartient au cercle (C') de centre *A* et de rayon 1.

4. Soit le point *P* d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.

a. Déterminer la forme exponentielle de $(p+1)$.

b. Montrer que le point *P* appartient au cercle (C).

c. Soit *Q* le point d'affixe $q = -\bar{p}$ où $\bar{p}$ est le conjugué de *p*. Montrer que les points *A*, *P'* et *Q* sont alignés.

d. En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image *P'* du point *P* par l'application *f*.

Correction **Inscrivez –vous au groupe al Kashi ou acheter le livre**

Vrai-Faux justifié,

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points *A*(0 ; 0 ; 2) *B*(0 ; 4 ; 0) et *C*(2 ; 0 ; 0).

On désigne par *I* le milieu du segment [*BC*], par *G* l'isobarycentre des points *A*, *B* et *C*, et par *H* le projeté orthogonal du point *O* sur le plan (*ABC*).

Proposition 1 : « l'ensemble des points *M* de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0$ est le plan (*AIO*) ».

Proposition 2 : « l'ensemble des points *M* de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$ est la sphère de diamètre [*BC*] ».

Proposition 3 : « le volume du tétraèdre *OABC* est égal à 4 ».

Proposition 4 : « le plan (*ABC*) a pour équation cartésienne $2x + y + 2z = 4$ et le point *H* a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$. »

Proposition 5 : « la droite (*AG*) admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2-2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. »

Retard au travail

On a posé à 1 000 personnes la question suivante : « Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ». Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

Retards le 1er mois / Retards le 2ème mois	0	1	*2 ou plus*	Total
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2 ou plus	60	33	14	107
Total	572	318	110	1000

1. On choisit au hasard un individu de cette population.

a. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois,

b. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.

2. On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre n de mois (n entier naturel non nul). On fait les hypothèses suivantes :

– si l'individu n'a pas eu de retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,46.

– si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,66.

– si l'individu a eu deux retards ou plus le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est encore 0,66.

On note A_n, l'évènement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n, B_n, l'évènement « l'individu a eu exactement un retard le mois n », C_n, l'évènement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois n ».

Les probabilités des évènements A_n, B_n, C_n sont notées respectivement p_n, q_n et r_n.

a. Pour le premier mois ($n = 1$), les probabilités p_1, q_1 et r_1 sont obtenues à l'aide du tableau précédent. Déterminer les probabilités p_1, q_1 et r_1.

b. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, q_n, et r_n. Onpourra s'aider d'un arbre.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -0{,}2p_n + 0{,}66$.

d. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0{,}55$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

e. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Fonction, aire, équation,

Partie A

On donne le tableau de variations d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$.

1. Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $0 \leq F(3) \leq 4e^{-2}$.

Partie B

La fonction f considérée dans la partie A est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{-x}$. On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}$.

On désigne par (C) et (Γ) les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Les courbes sont tracées en annexe.

1. a. Montrer que les variations de la fonction f sont bien celles données dans la partie A. On ne demande pas de justifier les limites.

b. Étudier les positions relatives des courbes (C) et (Γ).

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \left(x^2 - 1\right)e^{-x}$.

a. Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \left(-x^2 - 2x - 1\right)e^{-x}$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

b. Soit un réel α supérieur ou égal à 1. On considère la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$. Déterminer l'aire $A(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, de cette partie du plan.

c. Déterminer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

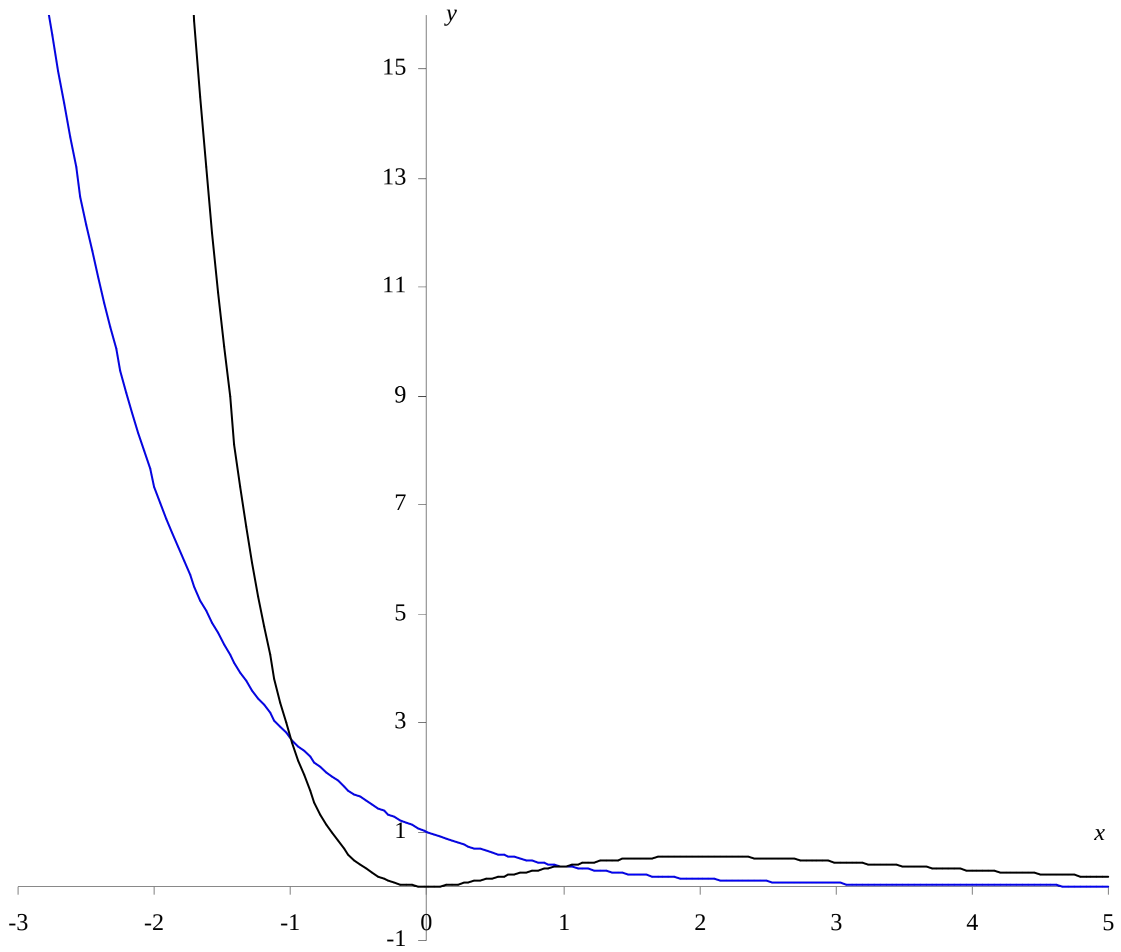
3. On admet que, pour tout réel m strictement supérieur à $4e^{-2}$, la droite d'équation $y = m$ coupe la courbe (C) au point $P(x_P ; m)$ et la courbe (Γ) au point $Q(x_Q ; m)$.

L'objectif de cette question est de montrer qu'il existe une seule valeur de x_P, appartenant à l'intervalle $]-\infty ; -1]$ telle que la distance PQ soit égale à 1.

a. Faire apparaître approximativement sur le graphique (proposé en annexe) les points P et Q tels que x_P appartienne à $]-\infty ; -1]$ et $PQ = 1$.

b. Exprimer la distance PQ en fonction de x_P et de x_Q. Justifier l'égalité $f(x_P) = g(x_Q)$.

c. Déterminer la valeur de x_P telle que $PQ = 1$.



<u>Correction</u> Inscrivez –vous au groupe al Kashi ou acheter le livre

Sujet 26

Exercice 1 Tle c

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points : A de coordonnées (3 ; 1 ; −5), B de coordonnées (0 ; 4 ; −5), C de coordonnées (−1 ; 2 ; −5) et D de coordonnées (2 ; 3 ; 4).

Pour chacune des six affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée. Le candidat doit indiquer sur sa copie le numéro de la question et la mention « VRAI » *ou* « FAUX ». *On attribue* 0,5 *point par réponse correcte et on retranche* 0,25 *point par réponse incorrect. L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Un éventuel total négatif est ramené à* 0.

1. Les points A, B et D sont alignés.
2. La droite (AB) est contenue dans le plan d'équation cartésienne : $x + y = 4$.
3. Une équation cartésienne du plan (BCD) est : $18x - 9y - 5z + 11 = 0$.
4. Les points A, B, C et D sont coplanaires.
5. La sphère de centre A et de rayon 9 est tangente au plan (BCD).
6. Une représentation paramétrique de la droite (BD) est : $\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = \dfrac{7}{2} + k \\ z = -\dfrac{1}{2} - 9k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. *Question de cours*

On rappelle que : « Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = (\vec{u},\vec{w})$ ».

Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

a. Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right)$.

b. Interpreter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$.

2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 4 + i$, $z_B = 1 + i$, $z_C = 5i$ et $z_D = -3 - i$.
Placer ces points sur une figure.

3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1+2i)z - 2 - 4i$.

a. Préciser les images des points A et B par f.

b. Montrer que f admet un unique point invariant Ω, dont on précisera l'affixe ω.

4. a. Montrer que pour tout nombre complexe z, on a : $z' - z = -2i(2 - i - z)$.

b. En déduire, pour tout point M différent du point ω, la valeur de $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{\Omega M}\right)$.

c. Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?

d. Soit E le point d'affixe $z_E = -1 - i\sqrt{3}$. écrire z_E sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E' associé au point E.

***Exercice* 3**

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées. La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\dfrac{1}{4}$. La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\dfrac{1}{2}$.

Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.

Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leq n \leq 50$. On définit les évènements suivants :

- A : « le jardinier a choisi le lot 1 »,
- B : « le jardinier a choisi le lot 2 »,
- J_n : « le jardinier obtient n tulipes jaunes ».

1. Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.

a. Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?

b. Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?

c. Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

d. Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.

2. Probabilités conditionnelles.

a. Montrer que : $P_B(J_n) = \dbinom{50}{n} 2^{-50}$.

b. En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

c. On note p_n la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que J_n est réalisé. Etablir que : $p_n = \dfrac{3^{50-n}}{3^{50-n}+2^{50}}$.

d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n > 0{,}9$? Comment peut-on interpréter ce résultat ?

Exercice 4

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1.$$

a. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variation de f_n.

b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$.

On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1\,;e]$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On note Γ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

a. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées (0 ; 1) et le point B_n de coordonnées (n ; 0).

b. Faire un croquis représentant la courbe Γ et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

c. Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de Γ avec Δ_n.

d. Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).

3. a. Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n.

b. Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

c. Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).

d. Montrer que la suite (α_n) converge. On note l sa limite. Établir que : $\ln l = 1$ et en déduire la valeur de l.

4. On désigne par D_n le domaine délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = e$.

a. Calculer l'aire du domaine D_n en fonction de α_n et montrer que cette aire est égale à $\dfrac{\alpha_n^2}{n}$.

b. Établir que : $(e-\alpha_n)\ln(\alpha_n) \leq \dfrac{\alpha_n^2}{n} \leq (e-\alpha_n)$.

c. En déduire un encadrement de $n(e-\alpha_n)$.

d. La suite de terme général $n(e-\alpha_n)$ est-elle convergente ? Ce résultat permet-il d'apprécier la rapidité de la convergence de la suite (α_n)

SUJET 27 ET CORRIGE

EXERCICE 1

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5% de ce cheptel (ou 5 pour mille).

1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

2. a. On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux.

Montrer que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. Calculer son espérance mathématique.

b. On désigne par A l'évènement « aucun animal n'est malade parmi les 10 ».

On désigne par B l'évènement « au moins un animal est malade parmi les 10 ».

Calculer les probabilités de A et de B.

3. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note T l'évènement « avoir un test positif à cette maladie » et M l'évènement « être atteint de cette maladie ».

a. Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.

b. Calculer la probabilité de l'évènement T.

c. Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

Correction ***Inscrivez –vous au groupe al Kashi ou acheter le livre***

EXERCICE2

Les parties A et B sont indépendantes.

On considère l'équation (E) $z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=0$ où z désigne un nombre complexe.

Partie A

1. a. Montrer que (E) admet une solution réelle, notée z_1.

b. Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

$$z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=(z-z_1)(z-2-2i)(az+b).$$

2. Résoudre (E).

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives 1, $2+2i$ et $1-i$.

1. Représenter A, B et C.

2. Déterminer le module et un argument de $\frac{2+2i}{1-i}$. En déduire la nature du triangle OBC.

3. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier votre affirmation.

4. Soit D l'image de O par la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre C. Déterminer l'affixe de D.

5. Quelle est la nature de $OCDB$?

Correction **Inscrivez –vous au groupe al Kashi ou acheter le livre**

EXERCICE3

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$.

1. a. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$. Étudier le sens de variation de f, et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (on prendra comme unité 2 cm).

b. Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $(O\,;\vec{i})$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul $u_n\geq\sqrt{2}$.

b. Montrer que pour tout $x>\sqrt{2}$, $f(x)\leq x$.

c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

d. Prouver qu'elle converge.

3. Soit l la limite de la suite (u_n). Montrer que l est solution de l'équation $x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$. En déduire sa valeur.

EXERCICE4 Tle C

Première partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère :

– les points $A(0\,;0\,;3)$, $E(2\,;0\,;4)$, $C(-1\,;1\,;2)$ et $D(1\,;-4\,;0)$;
– les plans (P_1) : $7x+4y-3z+9=0$ et (P_2) : $x-2y=0$;
– les droites (d_1) et (d_2) définies par leurs systèmes d'équations paramétriques respectifs

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=-8+2t \\ z=-10+5t \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x=7+2t' \\ y=8+4t' \\ z=8-t' \end{cases},\ t'\in\mathbb{R}.$$

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

	a	b	c	d
1. Le plan (P_1) est	Le plan (ABC)	Le plan (BCD)	Le plan (ACD)	Le plan (AED)
2. La droite (d_1) contient	Le point A	Le point B	Le point C	Le point D
3. Position relative de (d_1) et de (d_2)	(d_1) est strictement parallèle a (P_1)	(d_1) est incluse dans (P_1)	(d_1) coupe (P_1)	(d_1) est orthogonale à (P_1)
4. Position relative de (d_1) et de (d_2)	(d_1) est strictement parallèle à (d_2)	(d_1) et (d_2) sont confondues	(d_1) et (d_2)) sont sécantes	(d_1) et (d_2) sont non coplanaires.
5. L'intersection de (P_1) et de (P_2) est une droite dont une représentation paramétrique est	$\begin{cases} x=t \\ y=-2+\frac{1}{2}t \\ z=3t \end{cases}$	$\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=3+6t \end{cases}$	$\begin{cases} x=5t \\ y=1-2t \\ z=t \end{cases}$	$\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+t \\ z=-3t \end{cases}$

Deuxième partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère la droite (D) passant par $A(0\,;0\,;3)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}$ $(1\,;0\,;-1)$ et la droite (D') passant par $B(2\,;0\,;4)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{v}$ $(0\,;1\,;1)$.

L'objectif est de démontrer qu'il existe une droite unique perpendiculaire à la fois à (D) et à (D'), de la déterminer et de dégager une propriété de cette droite.

1. On considère un point M appartenant à (D) et un point M' appartenant à (D') définis par $\overrightarrow{AM}=a\vec{u}$ et $\overrightarrow{BM}=b\vec{v}$, où a et b sont de nombres réels.

Exprimer les coordonnées de M, de M' puis du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de a et b.

2. Démontrer que la droite (MM') est perpendicuaire à (D) et à (D') si et seulement si le couple (a ; b) est solution du système $\begin{cases} 2a+b=1 \\ a+2b=-1 \end{cases}$.

3. Résoudre ce système. En déduire les coordonnées des deux uniques points M et M', que nous noterons ici H et H', tels que la droite (HH') soit bien perpendiculaire commune à (D) et à (D').

Montrer que $HH'=\sqrt{3}$ unités de longueur.

4. On considère un point M quelconque de la droite (D) et un point M' quelconque de la droite (D').

a. En utilisant les coordonnées obtenues à la question 1, démontrer que

$$MM'^2=(a+b)^2+(a-1)^2+(b+1)^2+3.$$

b. En déduire que la distance MM' est minimale lorsque M est en H et M' est en H'.

SUJET 28

Exercice 1

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

A. Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.

Pour i = 1 ou i = 2, on note E_i l'évènement : « Le touriste se dirige vers l'Est le i-ème jour » et O_i l'évènement : « Le touriste se dirige vers l'Ouest le i-ème jour ».

1. Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.

2. Déterminer les probabilités suivantes : $p(E_1)$; $p_{E_1}(O_2)$; $p(E_1 \cap E_2)$.

3. Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage les deux jours consécutifs.

B. On suppose maintenant que n touristes ($n \geq 3$) se retrouvent un jour en haut de la falaise. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'Est.

1. Déterminer la probabilité que k touristes ($0 \leq k \leq n$) partent en direction de l'Est.

2. On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est heureux s'il se retrouve seul sur une plage.

a. Peut-il y avoir deux touristes heureux ?

b. Démontrer que la probabilité (notée p) qu'il y ait un touriste heureux parmi ces n touristes vaut : $p=\dfrac{n}{2^{n-1}}$.

c. Application numérique : lorsque le groupe comprend 10 personnes, exprimer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi les 10.

Exercice 2

1. $\overrightarrow{OM}$ apour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OM'}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, ils sont orthogonaux si et seulement si $xx'+yy'=0$.

Calculons $z'\bar{z}=(x'+iy')(x-iy)=(x'x+y'y)+i(xy'-yx')$. Donc $xx'+yy'=0$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z'\bar{z})=0$.

2. O, M et M' sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})=0 \Leftrightarrow xy'-yx'=0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z'\bar{z})=0$.

Applications

3. Prenons $z' = z^2 - 1 = x^2 - y^2 - 1 + 2xy$, alors $xx' + yy' = x\left(x^2 - y^2 - 1\right) + y\left(2xy\right) = x\left(x^2 + y^2 - 1\right)$; le produit scalaire est donc nul si $x = 0$ (axe des ordonnées) ou $x^2 - y^2 - 1 = 0$ (cercle trigonométrique).

4. a. On a $\overline{\left(z^2 - 1\right)} = \left(\overline{z}^2 - 1\right) = -\overline{z}^2\left(-1 + \frac{1}{\overline{z}^2}\right) = -\overline{z}^2\overline{\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)}$ donc la condition du 2. se traduit par

$$\operatorname{Im}\left[\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\overline{\left(z^2 - 1\right)}\right] = \operatorname{Im}\left[\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\left(-\overline{z}^2\right)\overline{\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)}\right] = \operatorname{Im}\left(-\overline{z}^2\left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2\right).$$

b. Comme $\left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2$ est réel, la partie imaginaire est celle de $-\overline{z}^2 = -\left(x - iy\right)^2 = -x^2 + y^2 + 2ixy$. L'ensemble cherché est la réunion des axes des abscisses et des ordonnées.

Exercice 3 Tle C)

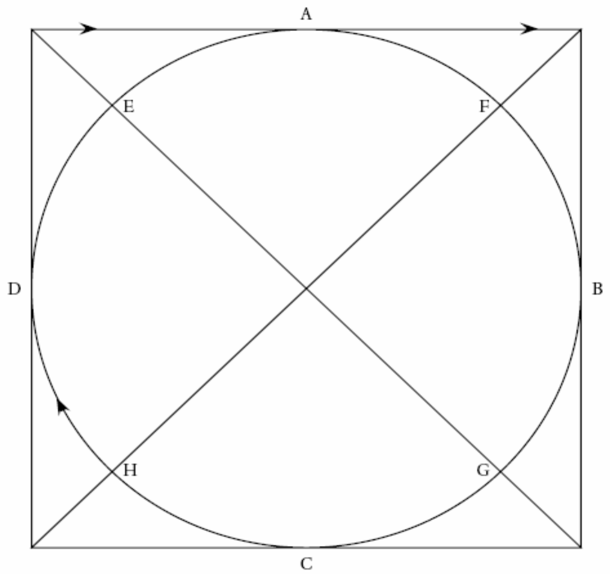
5 points

1. On considère l'équation (E) : $17x - 24y = 9$ où (x, y) est un couple d'entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple (9 ; 6) est solution de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

2. Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un un manège circulaire représenté par le schéma. Il peut s'installer sur l'un des huit points indiqués sur le cercle.



Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle.

Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes.

Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin.

À l'instant $t = 0$, Jean part du point H en même temps que le pompon part du point A.

a. On suppose qu'à un certain instant t Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon.

À l'instant t, on note y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A et x le nombre de tours effectués par le pompon. Montrer que (x, y) est solution de l'équation (E) de la question 1.

b. Jean a payé pour 2minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon ?

c. Montrer, qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A.

d. Jean part maintenant du point E. Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes ?

Exercice 3

6 points

Dans tout l'exercice, λ désigne un nombre réel de l'intervalle]0 ; 1].

1. On se propose d'étudier les fonctions dérivables sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$ vérifiant l'équation différentielle (E_λ) :

$y' = y^2 + \lambda y$ et la condition $y(0) = 1$.

On suppose qu'il existe une solution y_0 de (E_λ) strictement positive sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$ et on pose sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$:

$z = \dfrac{1}{y_0}$. Écrire une équation différentielle simple satisfaite par la fonction z.

2. Question de cours.

PRÉ-REQUIS : les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle.

a. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle $(E'_\lambda) : z' = -(\lambda z + 1)$ telle que $z(0)$ = 1.

b. Donner l'expression de cette fonction que l'on notera z_0.

On veut maintenant montrer que la fonction z_0 ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$.

3. a. Démontrer que $\ln(1+\lambda) > \dfrac{\lambda}{\lambda+1}$.

On pourra étudier sur]0 ; 1] *la fonction f définie par* $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{x+1}$.

b. En déduire que $\dfrac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) > \dfrac{1}{2}$.

4. En déduire que la fonction z_0 ne s'annule pas sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$.

Démontrer alors que (E_λ) admet une solution strictement positive sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$ que l'on précisera.

Exercice 4

On considère dans l'espace un cube de 3 cm de côté, noté *ABCDEFGH* et représenté sur l'annexe.

Soit I le barycentre des points pondérés (E ; 2) et (F ; 1), J celui de (F ; 1) et (B ; 2) et enfin K celui de (G ; 2) et (C ; 1).

On veut déterminer l'ensemble des points M équidistants de I, J et K. On note Γ cet ensemble.

1. Placer les points I, J et K sur la figure de l'annexe qui sera rendue avec la copie.

2. Soit Ω le point de Γ situé dans le plan (IJK). Que représente ce point pour le triangle IJK ?

Pour la suite de l'exercice, on se place maintenant dans le repère orthonormal suivant : $\left(A\,;\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$.

3. Donner les coordonnées des points I, J et K.

4. Soit $P(2\,;\,0\,;\,0)$ et $Q(1\,;\,3\,;\,3)$ deux points que l'on placera sur la figure. Démontrer que la droite (PQ) est orthogonale au plan (IJK).

5. Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$.

a. Démontrer que M appartient à Γ si, et seulement si, le triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ est solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de Γ ?

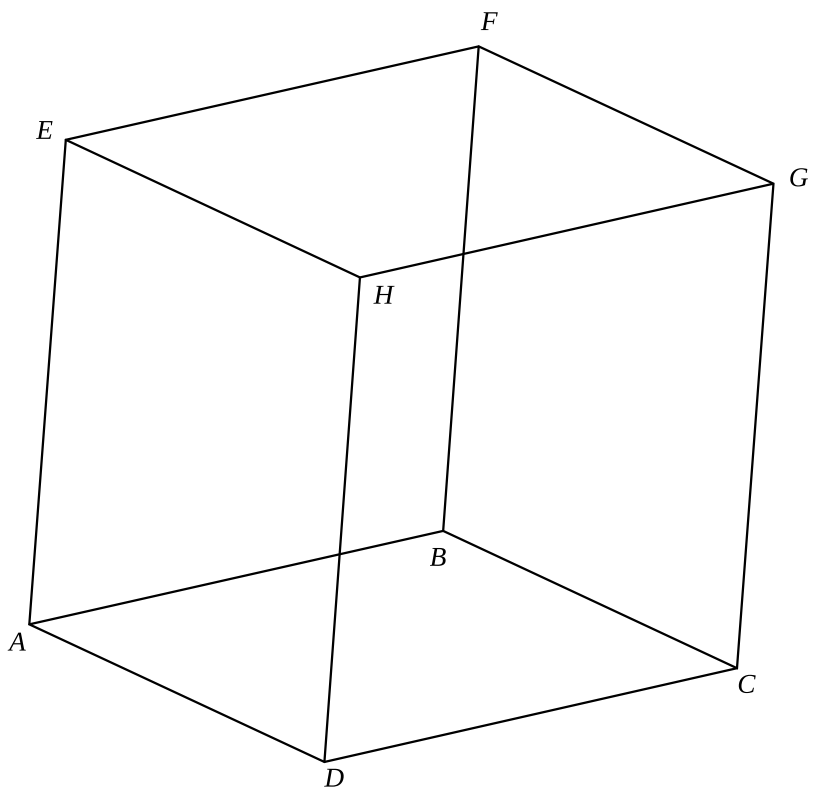
b. Vérifier que P et Q appartiennent à Γ. Tracer Γ sur la figure.

6. a. Déterminer un vecteur normal au plan (IJK) et en déduire une équation cartésienne de ce plan.

b. Déterminer alors les coordonnées exactes de Ω.

ANNEXE 1 À RENDRE AGRAFÉE À LA COPIE

Figure de l'exercice 4



Sujet 29

Exercice 1

4 points

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le plan P d'équation $2x+y-2z+4=0$ et les points A de coordonnées $(3,2,6)$, B de coordonnées $(1,2,4)$ et C de coordonnées $(4,-2,5)$.

1. a. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.

b. Vérifier que ce plan est P.

2. a. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

b. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan P.

c. Soit K le projeté orthogonal de O sur P. Calculer la distance OK.

d. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.

3. On considère dans cette question le système de points pondérés $S=\{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$.

a. Vérifier que ce système admet un barycentre qu'on notera G.

b. On note I le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G appartient à (OI).

c. Déterminer la distance de G au plan P.

4. Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$. Déterminer Γ. Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à P et Γ ?

Exercice 2 Tlec

5 points

1. Dans cette question il est demandé au candidat d'exposer des connaissances.

On suppose connus les résultats suivants :

- la composée de deux similitudes planes est une similitude plane ;
- la transformation réciproque d'une similitude plane est une similitude plane ;
- une similitude plane qui laisse invariants trois points non alignés du plan est l'identité du plan.

Soient A, B, C trois points non alignés du plan et s et s' deux similitudes du plan telles que :

$$s(A)=s'(A),\ s(B)=s'(B),\ s(C)=s'(C).$$

Montrer que $s=s'$.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$. La figure sera complétée au fur et à mesure. On donne les points A d'affixe 2, E d'affixe $1+i$, F d'affixe $2+i$ et G d'affixe $3+i$.

a. Calculer les longueurs des côtés des triangles OAG et OEF. En déduire que ces triangles sont semblables.

b. Montrer que OEF est l'image de OAG par une similitude indirecte S, en déterminant l'écriture complexe de S.

c. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$. On pose $A'=h(A)$ et $G'=h(G)$, et on appelle I le milieu de [EA']. On note σ la symétrie orthogonale d'axe (OI). Montrer que $S=\sigma\circ h$.

Exercice 2 (

5 points

1. Dans cette question il est demandé au candidat d'exposer des connaissances.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$. Soit R la rotation du plan de centre Ω, d'affixe ω et d'angle de mesure θ. L'image par R d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :

- $R(\Omega)=\Omega$;
- pour tout point M du plan, distinct de Ω, l'image M' de M est définie par $\Omega M'=\Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta\,[2\pi]$.

On rappelle que pour des points A et B d'affixes respectives a et b, $AB=|b-a|$ et $\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)=\arg(b-a)\,[2\pi]$.

Question : montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M' par la rotation R sont liées par la relation

$$z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega).$$

2. On considère les points I et B d'affixes respectives $z_I=1+i$ et $z_B=2+2i$. Soit R la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

a. Donner l'écriture complexe de R.

b. Soit A l'image de I par R. Calculer l'affixe z_A de A.

c. Montrer que O, A et B sont sur un même cercle de centre I. En déduire que OAB est un triangle rectangle en A. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

d. En déduire une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right)$.

3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{IO}$. On pose $A' = T(A)$.

a. Calculer l'affixe $z_{A'}$ de A'.

b. Quelle est la nature du quadrilatère $OIAA'$?

c. Montrer que $-\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de $z_{A'}$.

Exercice 3

5 points

On considère la fonction f définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Etudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$ et dresser le tableau de ses variations.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par son terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

a. Justifier que, si $n \leq x \leq n+1$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

b. Montrer, sans chercher à calculer u_n, que pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit F la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $F(x) = \left[\ln(x+3)\right]^2$.

a. Justifier la dérivabilité de F sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et déterminer pour tout réel positif x le nombre $F'(x)$.

b. On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,dx$. Calculer I_n.

4. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$.

Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

Exercice 4

6 points

Pour réaliser une enquête, un employé interroge des personnes prises au hasard dans une galerie commerçante. Il se demande si trois personnes au moins accepteront de répondre.

1. Dans cette question on suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard accepte de répondre est 0,1. L'employé interroge au hasard 50 personnes de manière indépendante. On considère les événements :

A : « au moins une personne accepte de répondre » ;

B : » moins de trois personnes acceptent de répondre » ;

C : « trois personnes ou plus acceptent de répondre ».

Calculer les probabilités des événements A, B et C. On arrondira au millième.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Dans cette question on suppose que la variable aléatoire X qui, à tout groupe de n personnes interrogées iondépendamment, associe le nombre de personnes ayant accepté de répondre, suit la loi de probabilité définie par :

$$\text{Pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n-1,\ P(X = k) = \frac{e^{-a}a^k}{k!} \text{ et } P(X = n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-a}a^k}{k!},$$

formules dans lesquelles $a = \frac{n}{10}$.

a. Montrer que la probabilité qu'au moins trois personnes répondent est donnée par :

$$f(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$

b. Calculer $f(5)$. En donner l'arrondi au millième. Cette modélisation donne-t-elle un résultat voisin de celui obtenu à la question 1 ?

3. On conserve le modèle de la question 2. On souhaite déterminer le nombre minimum de personnes à interroger pour que la probabilité que trois d'entre elles au moins répondent soit supérieure ou égale à 0,95.

a. Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 1 - e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$ ainsi que sa limite en $+\infty$.

Dresser son tableau de variation.

b. Montrer que l'équation $f(x) = 0,95$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}^+$ et que cette solution est comprise entre 6,29 et 6,3.

c. En déduire le nombre minimum de personnes à interroger.

Correction sujette 29Inscrivez –vous au groupe al Kashi ou acheter le livre

Sujet 30

Exercice 1

3 points

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit (P) le plan dont une équation est : $2x + y - 3z + 1 = 0$. Soit A le point de coordonnées $(1\,;11\,;7)$.

Proposition 1 : « Le point H, projeté orthogonal de A sur (P) a pour coordonnées $(0\,;2\,;1)$. »

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2 - 2y$.

On appelle u la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $u(0) = 0$.

Proposition 2 : « On a $u\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{1}{2}$. »

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$.

Proposition 3 : « Pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 7$. »

Exercice 2

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 4 cm).

Soit le point A d'affixe $z_A = i$ et B le point d'affixe $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r.

a. Déterminer une écriture complexe de r.

b. Montrer que l'affixe de C est $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

c. Ecrire z_B et z_C sous forme algébrique.

d. Placer les points A, B et C.

2. Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, −1 et 2.

a. Montrer que l'affixe de D est $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Placer le point D.

b. Montrer que A, B, C et D sont sur un même cercle.

3. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h.

a. Déterminer une écriture complexe de h.

b. Montrer que l'affixe de E est $z_E = \sqrt{3}$. Placer le point E.

4. a. Calculer le rapport $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.

b. En déduire la nature du triangle CDE.

Exercice 2 (Tle c

5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 3 + 5i$, $b = -4 + 2i$, $c = 1 + 4i$.

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2 - 2i)z + 1$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. a. Déterminer l'affixe du point B', image du point B par f.

b. Montrer que les droites (CB') et (CA) sont orthogonales.

3. Soit M le point d'affixe $z = x + iy$ où on suppose que x et y sont des entiers relatifs. Soit M' l'image de M par f.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.

4. On considère l'équation (E) : $x + 3y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple $(-4\,;2)$ est une solution de (E).

b. Résoudre l'équation (E).

c. En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5\,;5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM}'$ et $\overrightarrow{CA}$ soient orthogonaux. Placer ces points sur la figure.

Exercice 3

5 points

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties. La probabilité que le joueur perde la première partie est 0,2. Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

* s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;

* s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

1. On appelle :

E_1 l'événement « le joueur perd la première partie » ;

E_2 l'événement « le joueur perd la deuxième partie » ;

E_3 l'événement « le joueur perd la troisième partie ».

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

a. Quelles sont les valeurs prises pas X ?

b. Montrer que la probabilité de l'événement $(X=2)$ est égale à 0,031 et que celle de l'événement $(X=3)$ est égale à 0,002.

c. Déterminer la loi de probabilité de X.

d. Calculer l'espérance de X.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement « le joueur perd la n-ième partie », $\overline{E_n}$ l'événement contraire, et on note p_n la probabilité de l'événement E_n.

a. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités des événements $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n.

b. En déduire que $p_{n+1} = 0,05p_n + 0,05$ pour tout entier naturel n non nul.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \frac{1}{19}$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. En déduire u_n puis p_n en fonction de n.

c. Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

7 points

1. Restitution organisée de connaissances.

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

On supposera connus les résultats suivants :

* la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;

* $e^0 = 1$;

* pour tout réel x, on a $e^x > x$;

* soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A\,;+\infty[$ où A est un réel positif. Si, pour tout x de $[A\,;+\infty[$, on a $\psi(x) \leq \varphi(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

a. On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

Montrer que pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $g(x) \geq 0$.

b. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

2. On appelle f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}$. On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$. La courbe C est représentée ci-dessous.

a. Montrer que f est positive sur $[0\,;+\infty[$.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour C.

c. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0\,;+\infty[$.

3. On considère la fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

a. Montrer que F est une fonction croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b. Montrer que $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$.

c. Calculer la limite de F en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de F sur $[0\,;+\infty[$.

d. Justifier l'existence d'un unique réel α tel que $F(\alpha) = 0{,}5$. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

4. Soit n un entier naturel non nul. On note A_n l'aire en unités d'aire de la partie du plan située entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $A_n \geq 0{,}5$.

Sujet 31

Exercice 1

6 points

Question de cours

Prérequis : positivité et linéarité de l'intégrale.

Soient a et b deux réels d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur I telles que pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) > g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dt \geq \int_a^b g(x)\,dt$.

Partie A

1. Soit x un réel supérieur ou égal à 1. Calculer en fonction de x l'intégrale $\int_1^x (2-t)\,dt$.

2. Démontrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[1\,;+\infty[$, on a : $2-t \leq \frac{1}{t}$.

3. Déduire de ce qui précède que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a : $-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2} \leq \ln x$.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}$.

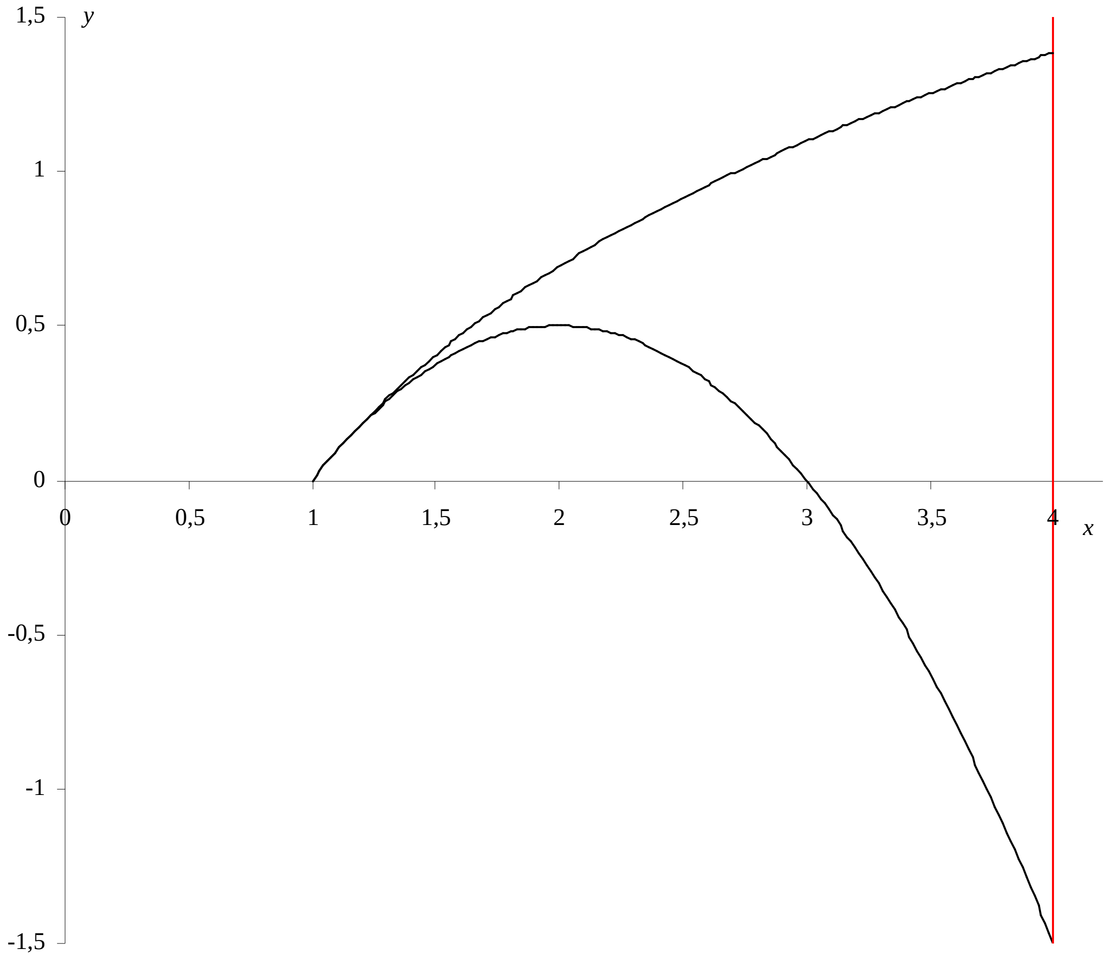
Sur le graphique joint en annexe, le plan estmuni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ dans lequel on a tracé les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle [1 ; 4]. On a a tracé également la droite (d) d'équation $x = 4$.

1. a. Démontrer que $\int_1^4 h(x)\,dx = 0$.

b. Illustrer sur le graphique le résultat de la question précédente.

2. On note D le domaine du plan délimité par la droite (d) et les courbes représentatives des fonction h et logarithme népérien sur l'intervalle [1 ; 4].

En utilisant un intégration par parties, calculer l'aire de D en unités d'aire.



Exercice 2

5 points

$(O\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe. Soit A le point d'affixe $1 + i$.

Au point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{1}{2}(z + i\bar{z})$.

1. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y' réels.

a. Démontrer les égalités suivantes : $x' = \frac{1}{2}(x+y)$ et $y' = \frac{1}{2}(x+y)$. En déduire que le point M' appartient à la droite (OA).

b. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $M = M'$.

c. Démontrer que pour tout point M du plan les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux.

2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. M_1 est le point d'affixe z_1 image de M par r, M_2 le point d'affixe $z_2 = \overline{z}$, M_3 le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $OM_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.

a. Dans cette question uniquement M a pour affixe $4 + i$, placer les points M, M_1, M_2, M_3.

b. Exprimer z_1 en fonction de z, puis z_3 en fonction de z.

c. $OM_1M_3M_2$ est-il un losange ? Justifier.

d. Vérifier que $z' - z = \frac{1}{2}iz_3$. En déduire que $MM' = \frac{1}{2}OM_3$.

3. Démontrer que les points M, M_1, M_2 et M_3 appartiennent à un même cercle de centre O si et seulement si $MM' = \frac{1}{2}OM$.

Donner alors la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{M'OM}$.

Exercice 2 (Tle C

5 points

$(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique 1 cm). On considère le point A d'affixe $z = 1 + i$. On note S_1 la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $(O\,;\vec{u})$ et h l'homothétie de centre O et de rapport 3. On pose $s = h \circ S_1$.

Partie A

1. Placer le point A et compléter la figure au fur et àmesure.
2. Quelle est la nature de la transformation s ? Justifier.
3. Déterminer l'écriture complexe de la transformation s.
4. a. Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par s.

b. Montrer que $z_B = -3iz_A$. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

5. Soient M le milieu de $[AB]$ et P l'image de M par s. Montrer que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (AB).

Partie B

1. On pose $C = s(B)$.Montrer que P est le milieu de $[BC]$.
2. a. Déterminer l'écriture complexe de $s \circ s$ et en déduire sa nature.

b. Montrer que l'image de la droite (OP) par s est la droite (OM).

c. Que représente le point M pour le triangle OBP ? Justifier.

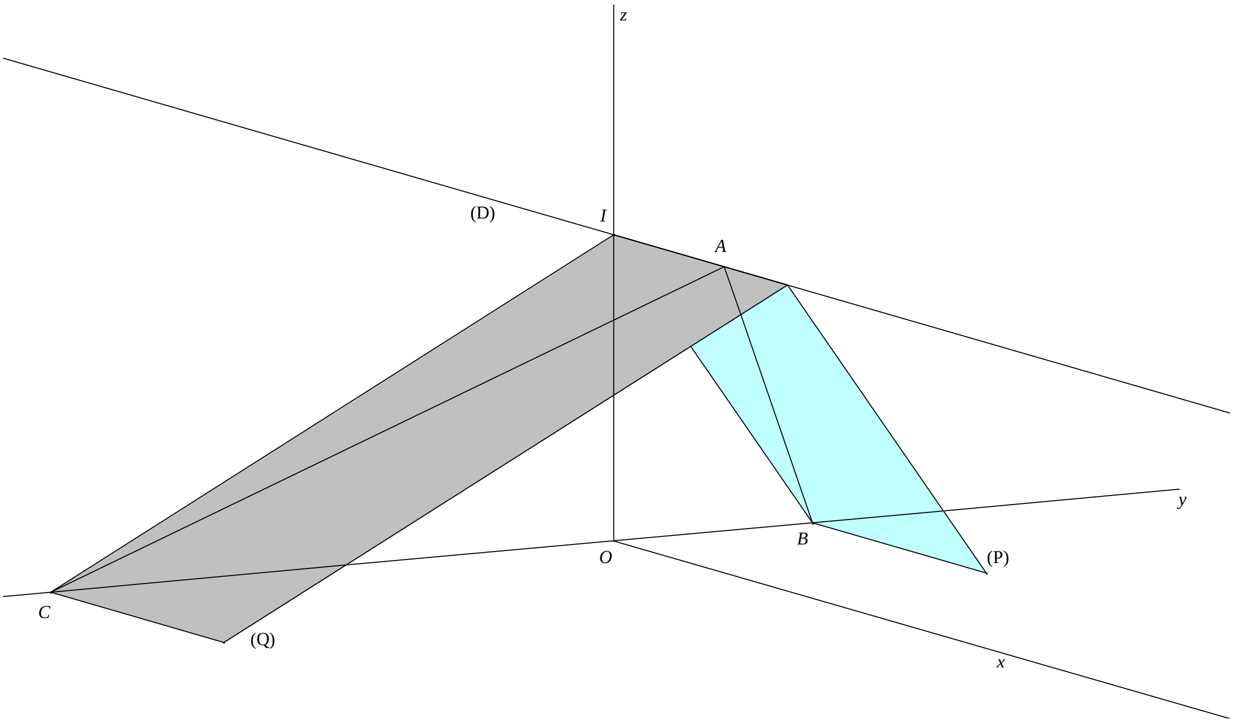
Exercice 3

5 points

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(3\,;\,0\,;\,6)$ et $I(0\,;\,0\,;\,6)$; on appelle (D) la droite passant par A et I.

On appelle (P) le plan d'équation $2y+z-6=0$ et (Q) le plan d'équation $y-2z+12=0$.

1. Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires.
2. Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D).
3. Démontrer que (P) et (Q) coupent l'axe $\left(O\,;\vec{j}\right)$ et déterminer les coordonnées des points *B* et *C*, intersections respectives de (P) et (Q) avec l'axe $\left(O\,;\vec{j}\right)$.
4. Démontrer qu'une équation du plan (T) passant par *B* et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$ est $x+4y+2z-12=0$.
5. Donner une représentation paramétrique de la droite (*OA*). Démontrer que la droite (O*A*) et le plan (T) sont sécants en un point *H* dont on déterminera les coordonnées.
6. Que représente le point *H* pour le triangle *ABC* ? Justifier.



Exercice 4

5 points

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro et la lettre de la question ainsi que la valeur correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte aux questions 1 et 2 rapporte 0,5 point et à la question 3 rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

On s'intéresse à deux types de pièces électroniques, P_1 et P_2, qui entrent dans la fabrication d'une boîte de vitesses automatique.

Une seule pièce de type P_1 et une seule pièce de type P_2 sont nécessaires par boîte.

L'usine se fournit auprès de deux sous-traitants et deux seulement : S_1 et S_2.

Le sous-traitant S_1 produit 80 % des pièces de type P_1 et 40 % de pièces de type P_2.

Le sous-traitant S_2 produit 20 % des pièces de type P_1 et 60 % de pièces de type P_2.

1. Un employé de l'usine réunit toutes les pièces P_1 et P_2 destinées à être incorporées dans un certain nombre de boîtes de vitesses. Il y a donc autant de pièces de chaque type.

Il tire une pièce au hasard.

a. La probabilité que ce soit une pièce P_1 est :

0,8	0,5	0,2	0,4	0,6

b. La probabilité que ce soit une pièce P_1 et qu'elle vienne de S_1 est :

0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

c. La probabilité qu'elle vienne de S_1 est

0,2	0,4	0,5	0,6	0,8

2. Il y a 200 pièces au total. Cette fois l'employé tire deux pièces simultanément. On suppose tous les tirages équiprobables.

a. Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité que ce soit deux pièces P_1 est :

0,1588	0,2487	0,1683	0,0095

b. Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité que ce soit deux pièces P_1 et P_2 est :

0,5000	0,2513	0,5025

c. La probabilité que ce soient deux pièces fabriquées par le même fournisseur est :

$\frac{357}{995}$	$\frac{103}{199}$	$\frac{158}{995}$

3. La durée de vie exprimée en années des pièces P_1 et P_2 suit une loi exponentielle dont le paramètre λ est donné dans le tableau suivant :

λ	P_1	P_2
S_1	0,2	0,25
S_2	0,1	0,125

On rappelle que si X, durée de vie d'une pièce exprimée en années, suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $p(X \le t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'une pièce P_1 fabriquée par S_1 dure moins de 5 ans est :

0,3679	0,6321

SUJET 32

Exercice 1

4 points

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à proposer un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si f est la fonction définie pour tout nombre réel x par : $f(x)=\sin^2 x$, alors sa fonction dérivée vérifie, pour tout nombre réel x, $f'(x)=\sin 2x$.

2. Soit f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$, dont la dérivée est continue sur cet intervalle. Si $f(-1)=-f(1)$, alors : $\int_{-1}^{1} tf(t)\,dt=-\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$.

3. Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0\,;\,3]$. Si $\int_0^3 f(t)\,dt \leq \int_0^3 g(t)\,dt$, alors pour tout nombre réel x appartenant à $[0\,;\,3]$: $f(x)\leq g(x)$.

4. Si f est solution de l'équation différentielle $y'=-2y+2$ et si f n'est pas une fonction constante, alors la représentation de f dans un repère du plan, n'admet aucune tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 2)

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm.

Soit λ un nombre complexe non nul et différent de 1. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (z_n) de nombres complexes par : $\begin{cases} z_0=0 \\ z_{n+1}=\lambda z_n+i \end{cases}$.

On note M_n le point d'affixe z_n.

1. Calcul de z_n en fonction de n et de λ.

a. Vérifier les égalités : $z_1=i$; $z_2=(\lambda+1)i$; $z_3=\left(\lambda^2+\lambda+1\right)i$.

b. Démontrer que, pour tout entier n positif ou nul : $z_n=\dfrac{\lambda^n-1}{\lambda-1}i$.

2. Étude du cas $\lambda=i$.

a. Montrer que $z_4=0$.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.

c. Montrer que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

d. Représenter les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

3. Caractérisation de certaines suites (z_n).

a. On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\lambda^k=1$. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_{n+k}=z_n$.

b. Réciproquement, monter que s'il existe un entier naturel k tel que, pour tout entier naturel n on ait l'égalité $z_{n+k}=z_n$ alors : $\lambda^k=1$.

Exercice 2 Tle c

5 points

Le but de cet exercice est d'étudier une même configuration géométrique à l'aide de deux méthodes différentes.

I À l'aide des nombres complexes, sur un cas particulier

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives 10 et $5i$.

a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et B en O.

b. Déterminer les éléments caractéristiques de s. On note Ω son centre.

c. Déterminer le point $s\circ s(B)$; en déduire la position du point Ω par rapport aux sommets du triangle ABO.

2. On note D la droite d'équation $x-2y=0$, puis A' et B' les points d'affixes respectives $8+4i$ et $2+i$.

a. Démontrer que les points A' et B' sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et de B sur la droite D.

b. Vérifier que $s(B') = A'$.

c. En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre $[A'B']$.

II À l'aide des propriétés géométriques des similitudes

OAB est un triangle rectangle en O tel que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{2}$.

1. On note encore s la similitude directe telle que $s(O) = A$ et $s(B) = O$. Soit Ω son centre.

a. Justifier le fait que l'angle de s est égal à $\frac{\pi}{2}$.

b. Démontrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[OA]$. (On admet de même que Ω appartient au cercle de diamètre $[OB]$.)

En déduire que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.

2. On désigne par D une droite passant par O, distincte des droites (OA) et (OB).

On note A' et B' les projetés othogonaux respectifs des points A et B sur la droite D.

a. Déterminer les images des droites (BB') et D par la similitude s.

b. Déterminer le point $s(B')$.

c. En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre $[A'B']$.

Exercice 3

4 points

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation.

Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.

Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

* 92 % des jouets sont sans défaut de finition;
* parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 %réussissent le test de solidité ;
* 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

* F l'évènement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
* S l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité ».

1. Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.

a. Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.

b. Démontrer que $p_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right)=\frac{1}{4}$.

c. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2. Calcul de probabilités.

a. Démontrer que $p(S) = 0,934$.

b. Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième.)

3. Étude d'une variable aléatoire B.

Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 euros, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 euros.

On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.

b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.

4. Étude d'une nouvelle variable aléatoire.

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.

Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.

Exercice 4

7 points

On désigne par a un réel strictement positif et différent de 1.

On se propose de rechercher, dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$, les solutions de l'équation E_a : $x^a = a^x$.

I. Étude de quelques cas particuliers

1. Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation E_2.

2. Vérifier que le nombre a est toujours solution de l'équation E_a.

3. On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation E_e.

On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = x - e\ln x$.

a. Question de cours : On rappelle que lorsque t tend vers $+\infty$, alors $\frac{e^t}{t}$ tend vers $+\infty$.

Démontrer que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

b. Déterminer les limites de h en 0 et $+\infty$.

c. Etudier les variations de h sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

d. Dresser le tableau des variations de h et conclure quant aux solutions de l'équation E_e.

II. Résolution de l'équation E_a

1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que x est solution de l'équation E_a si et seulement si x est solution de l'équation : $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

a. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.

b. Etudier les variations de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

d. Tracer la courbe C représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, unité : 2 cm.

3. Justifier à l'aide des résultats précédents les propositions (P_1) et (P_2) suivantes :

(P_1) : si $a \in \left]0\,;1\right]$, alors E_a admet l'unique solution α ;

(P_2) : si $a \in \left]1\,;e\right[\cup \left]e\,;+\infty\right[$, alors E_a admet deux solutions α et b, l'une appartenant à l'intervalle $]1\,;e[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $\left]e\,;+\infty\right[$.

SUJET 33

Exercice 1

4 points

Pour chacune des questions de ce QCM une seule, des trois propositions A, B ou C est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif la note de l'exercice est ramenée à 0.

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires.

1. On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne.

a. La probabilité de tirer 3 boules noires est :

A	B	C
$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{3}$

b. La probabilité de tirer 3 boules de lamême couleur est :

A	B	C
$\frac{11}{56}$	$\frac{11}{120}$	$\frac{16}{24}$

2. On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs et deux à deux indépendants.

a. La probabilité d'obtenir 5 fois une boule noire est :

A	B	C
$\left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(\frac{5}{8}\right)^3$	$\left(\frac{3}{8}\right)^3$	$\left(\frac{1}{5}\right)^5$

b. La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 3 boules rouges est :

A	B	C
$\left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$	$2\times\frac{5}{8}+3\times\frac{3}{8}$	$10\times\left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$

3. On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne. On note :

– R_1 l'évènement : « La première boule tirée est rouge » ;
– N_1 l'évènement : « La première boule tirée est noire » ;
– R_2 l'évènement : « La deuxième boule tirée est rouge » ;
– N_2 l'évènement : « La deuxième boule tirée est noire ».

a. La probabilité conditionnelle $P_{R_1}(R_2)$ est :

A	B	C
$\frac{5}{8}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{14}$

b. La probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_2$ est :

A	B	C
$\frac{16}{49}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{15}{56}$

c. La probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage est :

A	B	C
$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{28}$

d. La probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage sachant qu'on a obtenu une boule noire au second tirage est :

A	B	C
$\frac{15}{56}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{7}$

Exercice 2

5 points

I. Restitution organisée de connaissances

1. Démontrer qu' un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.
2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ orthonormé direct . On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respective a, b, c, et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine O, a pour orthocentre le point H d'affixe $a + b + c$.

II. Étude d'un cas particulier

On pose : $a = 3 + i$, $b = -1 + 3i$, $c = -\sqrt{5} - i\sqrt{5}$.

1. Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
2. Placer les points A, B, C et le point H d'affixe $a + b + c$, puis vérifier graphiquement que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

III. Étude du cas general

ABC est un triangle dont *O* est le centre du cercle circonscrit, et a, b, c sont les affixes respectives des points *A*, *B*, *C*.

1. Justifier le fait que *O* est le centre du cercle circonscrit au triangle *ABC* si et seulement si : $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c}$.

1. On pose $w = \bar{b}c - b\bar{c}$.

a. En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans le I., démontrer que w est imaginaire pur.

b. Verifier l'égalité : $(b+c)(\bar{b}-\bar{c}) = w$ et justifier que : $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{w}{|b-c|^2}$.

c. En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.

2. Soit *H* le point d'affixe $a + b + c$.

a. Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.

b. Prouver que $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (On admet de même que $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BH}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c. Que représente le point *H* pour le triangle *ABC* ?

Exercice 2 Tle C

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

Le but de cet exercice est d'étudier la similitude plane indirecte *f* d'écriture complexe :

$$z' = i\sqrt{2}\bar{z} + 2i\sqrt{2} - 2,$$

et d'en donner deux décompositions.

I. Restitution organisée de connaissances

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude plane directe autre qu'une translation est de la forme $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes avec $a \neq 1$.

Déterminer en fonction de a et de b l'affixe du centre d'une telle similitude plane directe.

II. Première décomposition de *f*

Soit g la similitude plane directe d'écriture complexe : $z' = i\sqrt{2}z + 2i\sqrt{2} - 2$.

1. Préciser les éléments caractéristiques de g. (centre, rapport, angle).

2. Déterminer une réflexion s telle que $f = g \circ s$.

III.Deuxième décomposition de *f*

1. Montrer que *f* admet un unique point invariant noté Ω. Déterminer l'affixe ω de Ω.

2. Soit D la droite d'équation : $y = x + 2$.

Montrer que pour tout point *N* appartenant à D, le point *f*(*N*) appartient aussi à D.

3. Soit σ la réflexion d'axe D et k la transformation définie par : $k = f \circ \sigma$.

a. Donner l'écriture complexe de σ.

Indication : on pourra poser $z' = a\bar{z} + b$ et utiliser deux points invariants par σ pour déterminer les nombres complexes a et b.

b. En déduire que l'écriture complexe de k est : $z' = \sqrt{2}z + 2\sqrt{2} - 2$.

c. Donner la nature de la transformation k et préciser ses éléments caractéristiques.

4. Déduire de ce qui précède une écriture de la similitude indirecte *f* comme composée d'une réflexion et d'une homothétie.

Exercice 3

4 points

Dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on désigne par C la courbe représentative d'une fonction *f* définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, *f* et *f'* ne s'annulant pas sur l'intervalle I.

On note *M* un point de C d'abscisse *x* et d'ordonnée $y = f(x)$.

On désigne par T la tangente à la courbe C au point *M*.

On rappelle qu'une équation de T est de la forme : $Y = f'(x)[X - x] + f(x)$.

I. Question préliminaire

1. Montrer que T coupe l'axe des abscisses en un point *H* dont l'abscisse X_T vérifie :

$$X_T = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

2. Montrer que T coupe l'axe des ordonnées en un point *K* dont l'ordonnée Y_T vérifie :

$$Y_T = f(x) - xf'(x).$$

II. *k* désigne un réel fixé non nul. On cherche à determiner les fonctions *f* pour lesquelles la différence $x - X_T$ est constante, et égale à *k*, pour tout nombre réel *x* (Propriété 1).

1. Démontrer que *f* vérifie la propriété 1 si et seulement si *f* vérifie l'équation différentielle :

$$y' = \frac{1}{k}y.$$

2. En déduire la famille des fonctions vérifiant la propriété 1 et déterminer pour $k = \frac{1}{2}$ la fonction *f* de cette famille qui vérifie de plus la condition : $f(0) = 1$.

III. *k* désigne un réel fixé non nul.

On cherche à déterminer les fonctions *f* pour lesquelles la différence $y - Y_T$ est constante et égale à *k*, pour tout nombre réel *x* appartenant à l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$ (Propriété 2).

1. Démontrer que *f* vérifie la condition posée si et seulement si *f* vérifie l'équation différentielle :

$$y' = \frac{k}{x}.$$

2. En déduire la famille des fonctions vérifiant la propriété 2 et déterminer pour $k = \frac{1}{2}$ la fonction *f* de cette famille qui vérifie la condition : $f(1) = 0$.

Exercice 4

7 points

Le but de l'exercice est demontrer que l'équation (E) : $e^x = \frac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

I. Existence et unicité de la solution

On note *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Démonter que *x* est solution de l' équation (E) si et seulement si *f* (*x*) = 0.

2. Étude du signe de la fonction *f*.

a. Etudier le sens de variations de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.

c. Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

d. Étudier le signe de *f* sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$.

II. Deuxième approche

On note *g* la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

1. Démontrer que l'équation *f* (*x*) = 0 est équivalente à l'équation *g* (*x*) = *x*.

2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.

3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction *g* est croissante sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$.

III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite α

On considére la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel *n*, par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note *l* sa limite.

3. Justifier l'égalité : $g(l) = l$. En déduire la valeur de *l*.

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.

Sujet 34

Exercice 1

5 points

Soient *a* et *b* deux nombres réels strictement positifs tels que *a* < *b*.

On désigne par *A* et par *B* les points d'abscisses respectives *a* et *b* de la courbe Γ représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Les points *Q* et *R* sont les projetés orthogonaux respectifs des points *A* et *B* sur l'axe des ordonnées.

1. a. Donner l'équation réduite de la tangente T au point *A* à la courbe Γ.

b. Déterminer l'ordonnée du point d'intersection *P* de T avec l'axe des ordonnées.

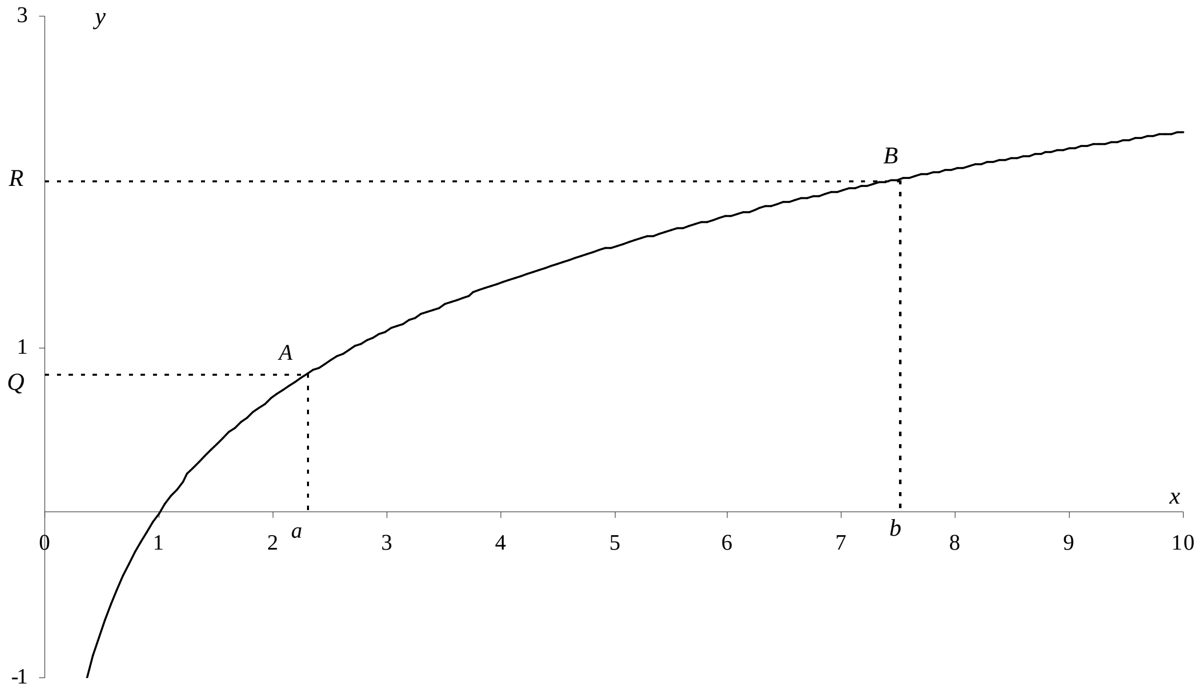
Calculer la longueur *PQ*. En déduire une construction simple de T ; la réaliser sur la figure ci-dessous.

2. Restitution organisée de connaissances : on suppose connue la propriété

« Pour tout couple (*x* ; *y*) de nombres réels strictement positifs, on a ln(*xy*) = ln(*x*)+ln(*y*). »

En déduire que, pour tout nombre réel *m* strictement positif, on a $\ln\sqrt{m} = \frac{1}{2}\ln m$.

3. Utiliser le résultat de la question 2 pour placer sur l'axe des abscisses le point *G* d'abscisse $\sqrt{ab}$. Expliquer la construction et la réaliser sur la figure (on laissera les traits de construction apparents).



Exercice 2

4 points

Soit a un nombre réel tel que $-1 < a < 0$.

On considère la suite u définie par $u_0 = a$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

1. Étudier lamonotonie de la suite u.

2. a. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + x$. Étudier le sens de variations de la fonction h.

En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1 ; 0[$, le nombre $h(x)$ appartient aussi à l'intervalle $]-1 ; 0[$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $-1 < u_n < 0$.

3. Étudier la convergence de la suite u. Déterminer, si elle existe, sa limite.

Exercice 3

6 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Établir que, pour tout nombre réel x non nul, $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Donner, sans démonstration, la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{e^x - 1}$ et démontrer que f est continue en 0.

3. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a : $e^x \geq x + 1$, et que l'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.

b. Calculer la dérivée f' de la fonction *f* et déterminer la fonction *g* telle que, pour tout nombre réel *x* non nul, $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{\left(e^x-1\right)^2}$.

c. Donner le tableau des variations de *f*.

4. Soient *x* un nombre réel non nul et les points *M*(*x* ; *f*(*x*)) et *M'*(−*x* ; *f*(−*x*)) de la courbe C.

a. Établir que $f(-x)=\dfrac{x}{e^x-1}$, puis déterminer le coefficient directeur de la droite (*MM'*).

b. On admet que la fonction *f* est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?

Exercice 4

5 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. *A*, *B*, *C* désignent les points d'affixes respectives $a=-2\sqrt{3}$, $b=\sqrt{3}-3i$ et $c=2i$.

1. a. Écrire *b* sous forme exponentielle.

b. Les points *A* et *C* sont représentés sur la figure ci-dessous. Construire à la règle et au compas le point *B* sur ce dessin (laisser les tracés de construction apparents).

2. On désigne par *E* le barycentre du système {(*A* ; 1) ; (*C* ; 3)} et par *F* le barycentre du système {(*A* ; 2) ; (B ; 1)}.

a. Établir que l'affixe *e* du point *E* est égale à $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$.

b. Déterminer l'affixe *f* du point *F*.

3. a. Démontrer que le quotient $\dfrac{e-c}{e-b}$ peut s'écrire *ki* où *k* est un nombre réel à déterminer. En déduire que, dans le triangle *ABC*, le point *E* est le pied de la hauteur issue de *B*. Placer le point *E* sur le dessin.

b. Démontrer que le point *F* possède une propriété analogue. Placer *F* sur le dessin.

4. On désigne par *H* le barycentre du système {(*A* ; 2) ; (*B* ; 1) ; (*C* ; 6)}.

Démontrer que le point *H* est le point d'intersection des droites (*BE*) et (*CF*). Qu'en déduit-on pour le point *H* ?

Exercice 4 (tle c

5 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. *A*, *B*, *C* désignent les points d'affixes respectives $a=-2\sqrt{3}$, $b=\sqrt{3}-3i$ et $c=2i$.

1. a. Écrire *b* sous forme exponentielle.

b. Les points *A* et *C* sont représentés sur la figure ci-dessous. Construire à la règle et au compas le point *B* sur ce dessin (laisser les tracés de construction apparents).

c. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)$ et de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{AC}\right)$.

2. Les points *E* et *F* ont pour affixes respectives $e=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$ et $f=-\sqrt{3}-i$.

a. Démontrer que les points *A*, *E* et *C*, d'une part, et les points *A*, *F* et *B*, d'autre part, sont alignés.

b. Démontrer que le quotient $\dfrac{e-c}{e-b}$ peut s'écrire *ki* où *k* est un nombre réel à déterminer.

Interpréter géométriquement ce résultat. On admet que, de façon analogue, $\frac{f-c}{f-b}$ peut s'écrire *k'i* où *k'* est un nombre réel non nul que l'on ne demande pas de déterminer.

c. Placer les points *E* et *F* sur la figure.

3. On désigne par *S* la similitude indirecte dont l'écriture complexe est $z \to z' = \frac{1}{2}\overline{z} - \sqrt{3}$.

Déterminer les images par *S* des trois points *A*, *B* et *C*.

4. Soit *H* le point d'intersection des droites (*BE*) et (*CF*). Placer le point *S*(*H*) sur la figure.

Sujet 35

Exercice 1

6 points

Soient *f* et *g* les fonctions définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln x$ et $g(x) = (\ln x)^2$.

On note C et C' les courbes représentatives respectives de *f* et *g* dans un repère orthogonal. Les courbes C et C' sont données ci-dessous.

1. a. Étudier le signe de $\ln x(1-\ln x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

b. En déduire la position relative des deux courbes C et C' sur $]0\,;+\infty[$.

2. Pour *x* appartenant à $]0\,;+\infty[$, *M* est le point de C d'abscisse *x* et *N* est le point de C' demême abscisse.

a. Soit *h* la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$. Étudier les variations de la fonction *h* sur $]0\,;+\infty[$.

b. En déduire que sur l'intervalle [1 ; *e*], la valeur maximale de la distance *MN* est obtenue pour $x = \sqrt{e}$.

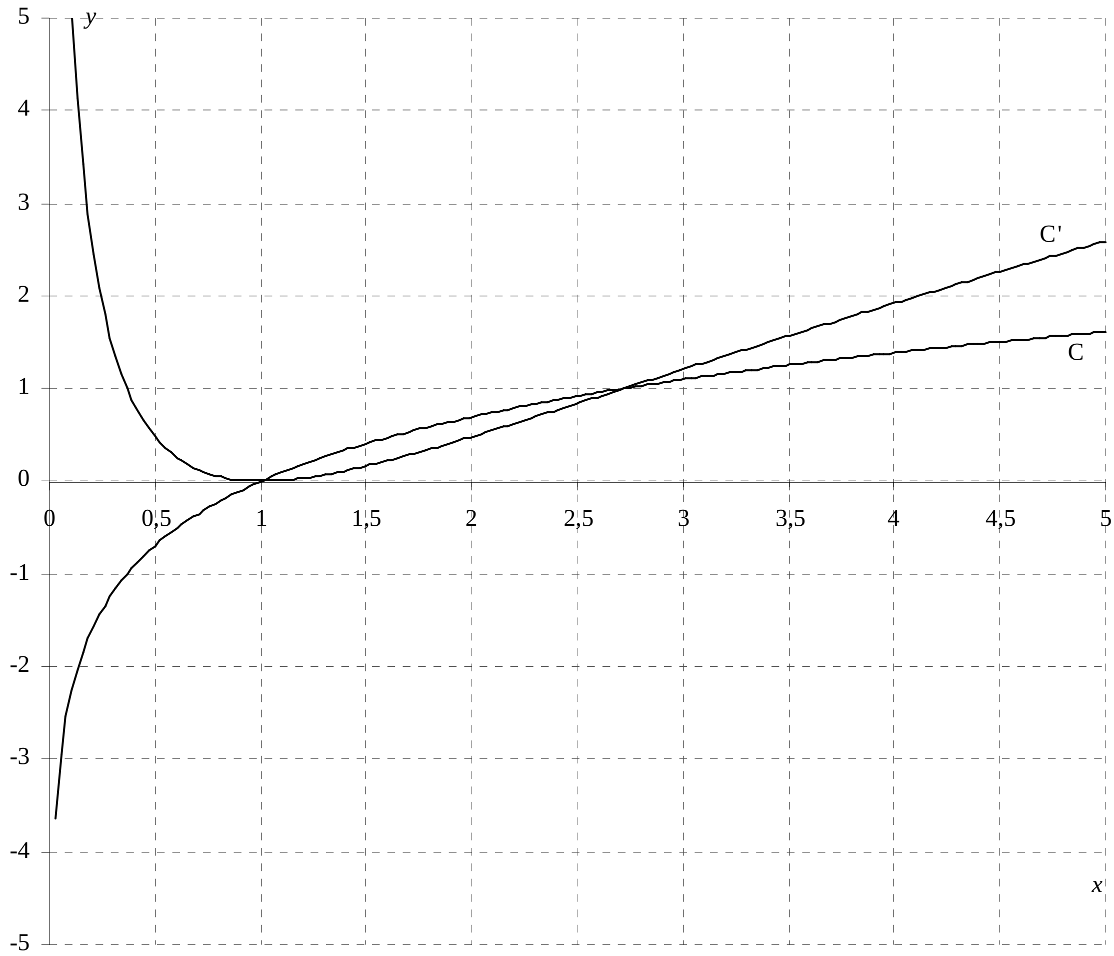
c. Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ l'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$.

d. En déduire que, sur $]0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, il existe deux réels *a* et *b* (*a* < *b*) pour lesquels la distance *MN* est égale à 1.

3. a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^e \ln x\,dx$.

b. Vérifier que la fonction*G* définie sur $]0\,;+\infty[$ par $G(x) = x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right]$ est une primitive de la fonction *g* sur $]0\,;+\infty[$.

c. On considère la partie du plan délimitée par les courbes C, C' et les droites d'équations *x* = 1 et *x* = *e*.
Déterminer l'aire A en unités d'aire de cette partie du plan.



Exercice 2

5 points : Pour chacune des 5 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

On considère la droite (d) dont un système d'équations paramétriques est : $\begin{cases} x = 2-\dfrac{t}{2} \\ y = 1 \\ z = 5-\dfrac{3t}{2} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

On note A le point de coordonnées (2 ; −1 ; 1), B le point de coordonnées (4 ; −2 ; 2) et C le point de (d) d'abscisse 1.

1. Proposition 1 : « La droite (d) est parallèle à l'axe $\left(O\,;\vec{j}\right)$ ».

2. Proposition 2 : « Le plan P d'équation $x + 3z - 5 = 0$ est le plan passant par A et orthogonal à (d) ».

3. Proposition 3 : « Lamesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\dfrac{\pi}{3}$ radians ».

4. Soit G le barycentre des points pondérés $(A\ ;\ -1)$, $(B ; 1)$ et $(C ; 1)$.
Proposition 4 : « Les segments $[AG]$ et $[BC]$ ont le même milieu ».
5. Proposition 5 : « La sphère de centre C et passant par B coupe le plan (P) d'équation $x + 3z - 5 = 0$ ».

Exercice 2 Tle c)

5 points
Pour chacune des 5 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u}, \vec{v})$. On considère la transformation du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z' définie par : $z' = 2iz + 1$.

Proposition 1 : « Cette transformation est la similitude directe de centre A d'affixe $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2 ».

2. Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O\ ;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on note S la surface d'équation $z = x^2 + 2x + y^2 + 1$.

Proposition 2 : « La section de S avec le plan d'équation $z = 5$ est un cercle de centre A de coordonnées $(-1\ ;\ 0\ ;\ 5)$ et de rayon 5 ».
3. Proposition 3 : « $5^{750} - 1$ est un multiple de 7 ».
4. Proposition 4 : « Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n + 4$ et de $4n + 3$ est égal à 7 ».
5. Soient a et b deux entiers naturels.
Proposition 5 : « S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv = 2$ alors le PGCD de a et b est égal à 2 ».

Exercice 3

4 points
On considère deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.
L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.
On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :
Étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.
Étape n ($n > 2$) :
* Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.
* Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2, on note sa couleur et on la remet dans U_2.
On note A_n l'évènement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité. On a donc $p_1 = 1$.
1. Calculer p_2.
2. Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}05$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
3. Calculer p_3.
4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier n entier naturel non nul, $p_n > 0{,}25$.
b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
c. En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté l.
d. Justifier que l vérifie l'équation : $l = 0{,}8l + 0{,}05$. En déduire la valeur de l.

Exercice 4

5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application *f* qui à tout point *M* d'affixe *z* non nulle associe le point *M'* = *f*(*M*) d'affixe *z'* tel que :

$z'=\dfrac{z}{|z|}(2-|z|)$.

Le cercle C_1, de centre *O* et de rayon 1, est représenté sur la figure, donnée en annexe, que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Pour *z* complexe non nul, on note $z=re^{i\alpha}$, *r* étant lemodule de *z* et α un argument de *z*.

1. Montrer que $z'=(2-r)e^{i\alpha}$.

2. Déterminer l'affixe *a'* du point *A'*, image par *f* du point *A* d'affixe *a* = 3.

3. Soit *B* le point d'affixe $b=-\sqrt{3}+i$.

a. Écrire *b* sous forme exponentielle.

b. Déterminer l'affixe *b'* du point *B'*, image du point *B* par *f*.

4. Placer *A*, *B*, *A'* et *B'* sur la figure.

5. a. Déterminer l'ensemble *E* des points *M* du plan privé du point *O* dont l'image par *f* est *O*.

b. Représenter *E* sur la figure.

6. Montrer que le cercle C_1 est l'ensemble des points *M* du plan distincts de *O* tels que *f*(*M*) =*M*.

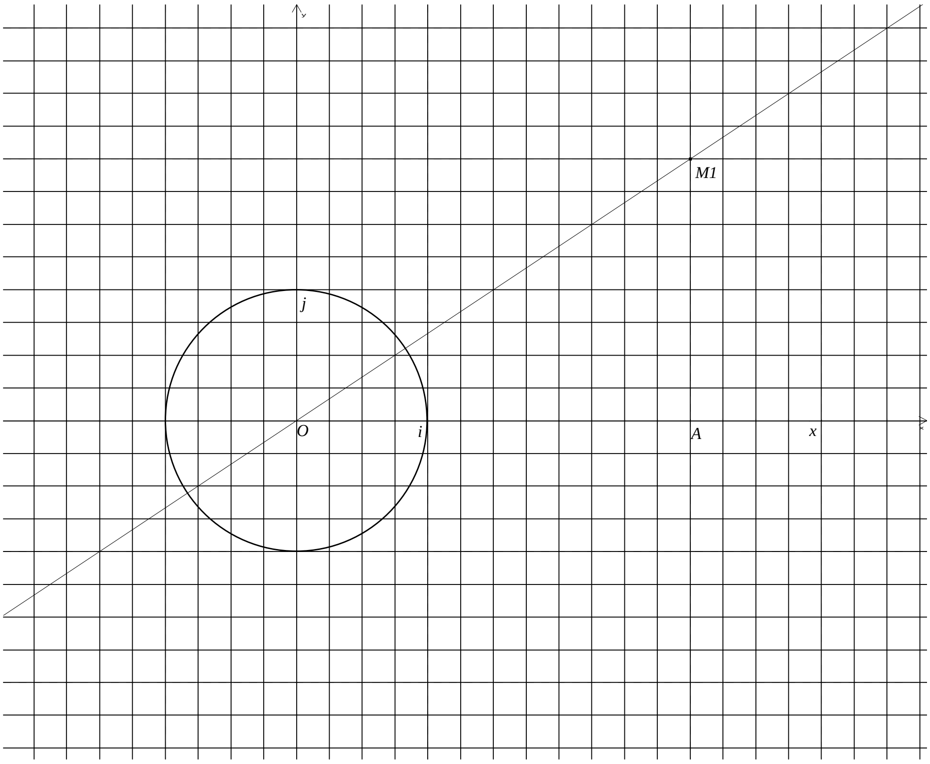
7. Pour cette question, *M* est un point du plan, distinct de *O*, n'appartenant pas au cercle C_1.

On appelle *I* le milieu du segment [*MM'*] où *M'* est l'image de *M* par *f*.

a. Montrer que *I* appartient à C_1.

b. Montrer que *I* appartient à la demi-droite [*OM*).

c. Sur la figure donnée en annexe est placé un point nommé M_1. Construire le point M'_1, image par *f* du point M_1.



" Quand le soleil s'éclipse, on en voit la grandeur. "

" Tout ce qui peut être fait un autre jour, le peut être aujourd'hui. "

SUJET 36

Exercice 1

3 points

L'espace est muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient (P) et (P') les plans d'équations respectives $x+2y-z+1=0$ et $-x+y+z=0$. Soit A le point de coordonnées (0 ; 1 ; 1).

1. Démontrer que les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.

2. Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + t \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$ où t est un nombre réel.

Démontrer que les plans (P) et (P') se coupent selon la droite (d).

3. Calculer la distance du point A à chacun des plans (P) et (P').

4. En déduire la distance du point A à la droite (d).

Exercice 2

3 points

1. Restitution organisée de connaissances

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

2. Soient les deux intégrales définies par $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ et $j = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$.

a. Démontrer que $I = -J$ et que $I = J + e^{\pi} + 1$.

b. En déduire les valeurs exactes de I et de J.

Exercice 3)

5 points

Partie A

On considère l'équation : (E) $z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$ où z est un nombre complexe.

1. Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.

2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)\left(az^2 + bz + c\right).$$

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i, $2 + 3i$ et $2 - 3i$.

1. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point A', image du point A par la rotation r.

2. Démontrer que les points A', B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A'.

Exercice 3 (Tle C

5 points

La figure est proposée en annexe 1. Elle sera complétée tout au long de l'exercice.

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C, d'affixes respectives $-5+6i$, $-7-2i$ et $3-2i$. On admet que le point F, d'affixe $-2+i$ est le centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC.

1. Soit H le point d'affixe -5. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe de centre A qui transforme le point C en le point H.

2. a. Étant donné des nombres complexes z et z', on note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z'. Soient a et b des nombres complexes.

Soit s la transformation d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ qui, au point M, associe le point M'. Déterminer a et b pour que les points A et C soient invariants par s. Quelle est alors la nature de s ?

b. En déduire l'affixe du point E, symétrique du point H par rapport à la droite (AC).

c. Vérifier que le point E est un point du cercle Γ.

3. Soit I le milieu du segment $[AC]$. Déterminer l'affixe du point G, image du point I par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{2}{3}$.

Démontrer que les points H, G et F sont alignés.

Exercice 4

4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. On donnera sur la feuille la réponse choisie sans justification. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon. Dans certaines questions, les résultats proposés ont été arrondis à 10^{-3} près.

1. Un représentant de commerce propose un produit à la vente. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'il rencontre un client, la probabilité qu'il vende son produit est égale à 0,2. Il voit cinq clients par matinée en moyenne. La probabilité qu'il ait vendu exactement deux produits dans une matinée est égale à :

a. 0,4	b. 0,04	c. 0,1024	d. 0,2048

2. Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève (garçon ou fille) au hasard. La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale à :

a. 0,043	b. 0,275	c. 0,217	d. 0,033

3. Dans la classe de la question 2, on interroge un élève au hasard parmi ceux ayant eu leur permis du premier coup. La probabilité que cet élève soit un garçon est égale à :

a. 0,100	b. 0,091	c. 0,111	d. 0,25

4. Un tireur sur cible s'entraîne sur une cible circulaire comportant trois zones délimitées par des cercles concentriques, de rayons respectifs 10, 20 et 30 centimètres.

On admet que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone et que le tireur atteint toujours la cible. La probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre est égale à :

a. $\frac{5}{9}$	b. $\frac{9}{14}$	c. $\frac{4}{7}$	d. $\frac{1}{3}$

Exercice 5

5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

La courbe C représentative de f est donnée sur le document de l'annexe 2 que l'on complétera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe C

1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

2. Pour tout x de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.

Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$.

Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.

3. Soit D la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe C et de la droite D.

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1. Démontrer que si $x \in [0\,;4]$, alors $f(x) \in [0\,;4]$.

2. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Sur le graphique de l'annexe 2, en utilisant la courbe C et la droite D, placer les points de C d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3.

b. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n \in [0\,;4]$.

c. Étudier lamonotonie de la suite (u_n).

d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par l sa limite.

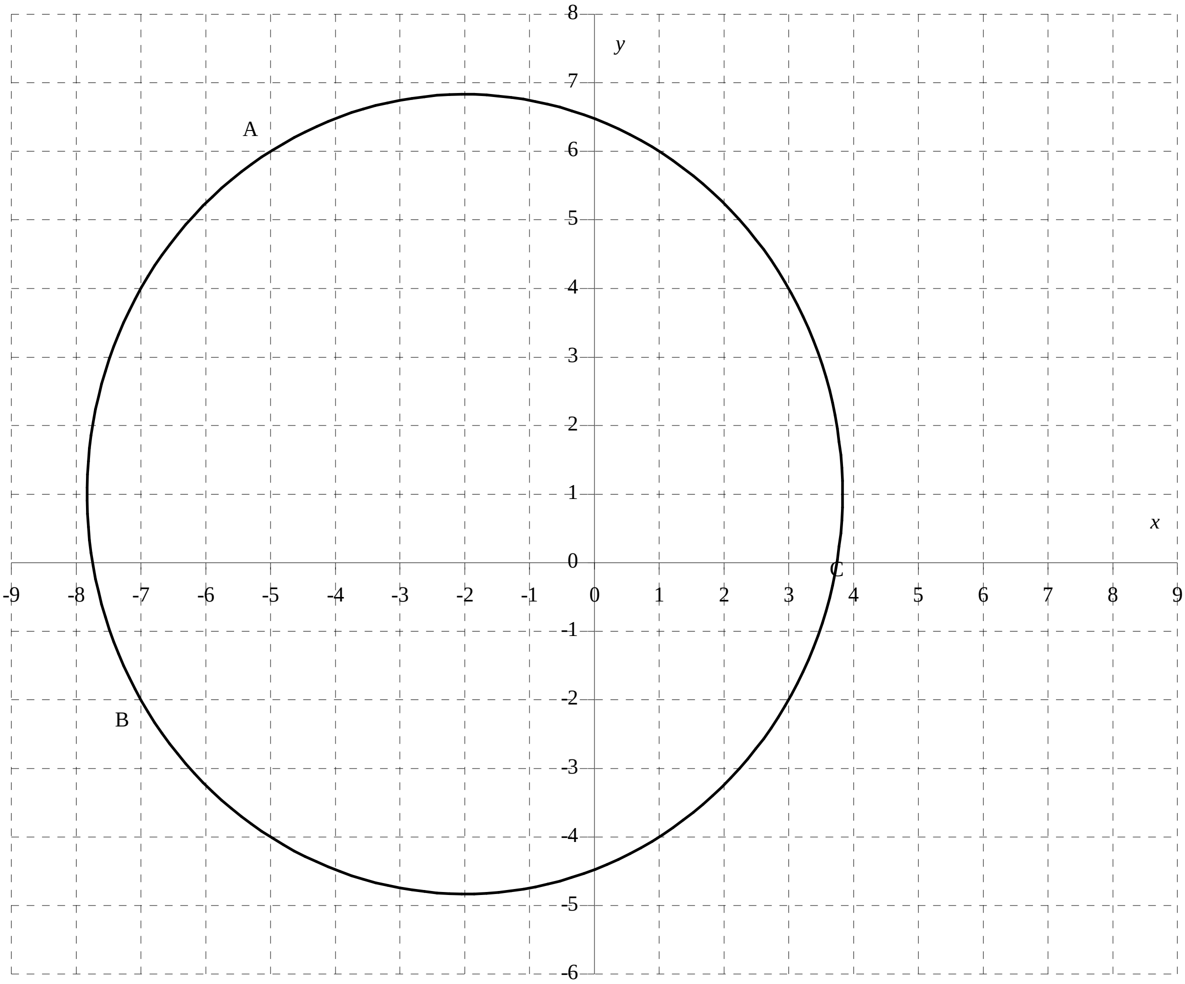
e. Utiliser la partie A pour donner la valeur de l.

ANNEXE 1

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

À compléter et à rendre avec la copie

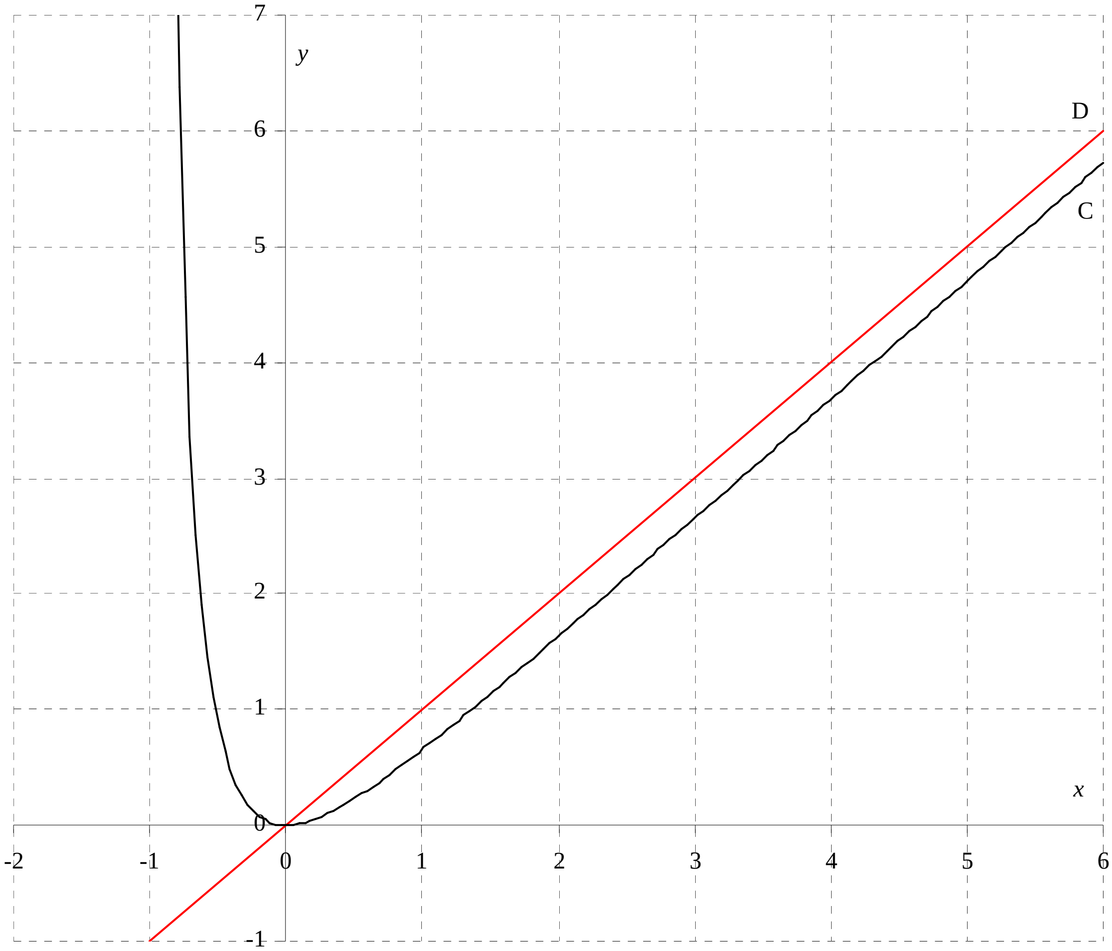
Exercice 3



ANNEXE 2

À compléter et à rendre avec la copie

Exercice 5



Correction SUJET 36 inscrivez vous

Sujet 37

Exercice 1

5 points

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

* si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;

* si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'événement « le jeton tiré est blanc » et G l'événement « le joueur gagne le jeu ». L'événement contraire d'un événement E est noté $\overline{E}$. La probabilité d'un événement est notée p(E).

Partie A

1. Montrer que $p(\text{G}) = \dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?

3. Un joueur fait quatre partie de façon indépendante. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99 ?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

* chaque joueur paye 1 euro par partie ;
* si le joueur gagne la partie il reçoit 5 euros ;
* si le joueur perd la partie il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.

a. Donner la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

b. On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si E(X) < 0. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?

2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

Exercice 2

4 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $\overline{z} - 3iz - 3 + 6i = 0$, $\overline{z}$ étant le conjugué de z.

2. On considère le point A d'affixe $4 - 2i$. Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.

3. Soit le point D d'affixe $2i$.

a. Représenter l'ensemble (E) des points M d'affixe z différente de $2i$ tels que :

$$\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

b. Représenter l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $z = 2i + 2e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

4. A tout point M d'affixe $z \neq -2$, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{z-1}{\overline{z}+2}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$.

Exercice 3

5 points

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A\left(\dfrac{2}{3}\,; -3\,; 2\right)$ et $B\left(-\dfrac{4}{3}\,; 0\,; -4\right)$. On note I le milieu du segment $[AB]$ et (S) la sphère de diamètre $[AB]$.

1. Soit E le barycentre des points pondérés $(A\,;2)$ et $(B\,;1)$.

a. Calculer les coordonnées de E.

b. Montrer que l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MO}\right\|$ est le plan médiateur du segment $[OE]$.

c. Montrer qu'une équation du plan (P) est $y=-1$.

2. a. Calculer le rayon de la sphère (S) et la distance du centre I de la sphère au plan (P). En déduire que l'intersection (C) du plan (P) et de la sphère (S) n'est pas vide.

b. Montrer qu'une équation de (C) dans le plan (P) est $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=12$. En déduire que (C) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3. Soit D le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{2}\,;4\sqrt{3}-1\right)$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (ID).

b. En déduire que la droite (ID) est sécante au cercle (C) en un point noté F dont on donnera les coordonnées.

Exercice 3 (Tle C

5 points

Partie A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les points $A(1\,;3\,;2)$, $B(4\,;6\,;-4)$ et le cône (Γ) d'axe $\left(O\,;\vec{k}\right)$, de sommet O et contenant le point A.

1. Montrer qu'une équation de (Γ) est $x^2+y^2=\frac{5}{2}z^2$.

2. Soit (P) le plan parallèle au plan (xOy) et contenant le point B.

a. Déterminer une équation de (P).

b. Préciser la nature de l'intersection (C_1) de (P) et de (Γ).

3. Soit (Q) le plan d'équation $y=3$. On note (C_2) l'intersection de (Q) et de (Γ). Sans justification reconnaître la nature de (C_2) parmi les propositions suivantes :

* deux droites parallèles ;
* deux droites sécantes ;
* une parabole ;
* une hyperbole ;
* un cercle.

Partie B

Soient x, y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées $(x\,;y\,;z)$. Les ensembles (C_1) et (C_2) sont les sections définies dans la **partie A**.

1. On considère l'équation (E) : $x^2+y^2=40$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Résoudre l'équation (E).

b. En déduire l'ensemble des points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2. a. Démontrer que si le point M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$, où x, y et z sont des entiers relatifs, est un point de (Γ) alors z est divisible par 2 et x^2+y^2 est divisible par 10.

b. Montrer que si M est un point de (C_2) alors $x^2\equiv 1 \text{ modulo } 10$.

c. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation $x^2\equiv 1 \text{ modulo } 10$.

d. Déterminer un point de (C_2), distinct de A, dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Exercice 4

6 points

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=1+x\ln x$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'aire $\boldsymbol{A}$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

On note M et N les points de (C_f) d'abscisses respectives 1 et 2, P et Q leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses. La figure est donnée plus bas.

1. a. Montrer que f est positive sur $[1\,;2]$.

b. Montrer que le coefficient directeur de la droite (MN) est $2\ln 2$.

c. Soit E le point d'abscisse $\frac{4}{e}$. Montrer que sur l'intervalle $[1\,;2]$, le point E est l'unique point de (C_f) en lequel la tangente à (C_f) est parallèle à (MN).

d. On appelle (T) la tangente à (C_f) au point E. montrer qu'une équationde (T) est : $y=(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1$.

2. Soit g la fonction définie sur $[1\,;2]$ par $g(x)=f(x)-\left[(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1\right]$.

a. Montrer que $g'(x)=1+\ln\left(\frac{x}{4}\right)$ pour tout x de $[1\,;2]$.

b. Etudier les variations de g sur $[1\,;2]$ et en déduire la position relative de (C_f) et de (T) sur cet intervalle.

3. Soient M' et N' les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite (T). On admet que la courbe (C_f) reste sous la droite (MN) sur l'intervalle $[1\,;2]$ et que les points M' et N' ont des ordonnées strictement positives.

a. Calculer les aires des trapèzes $MNQP$ et $M'N'QP$.

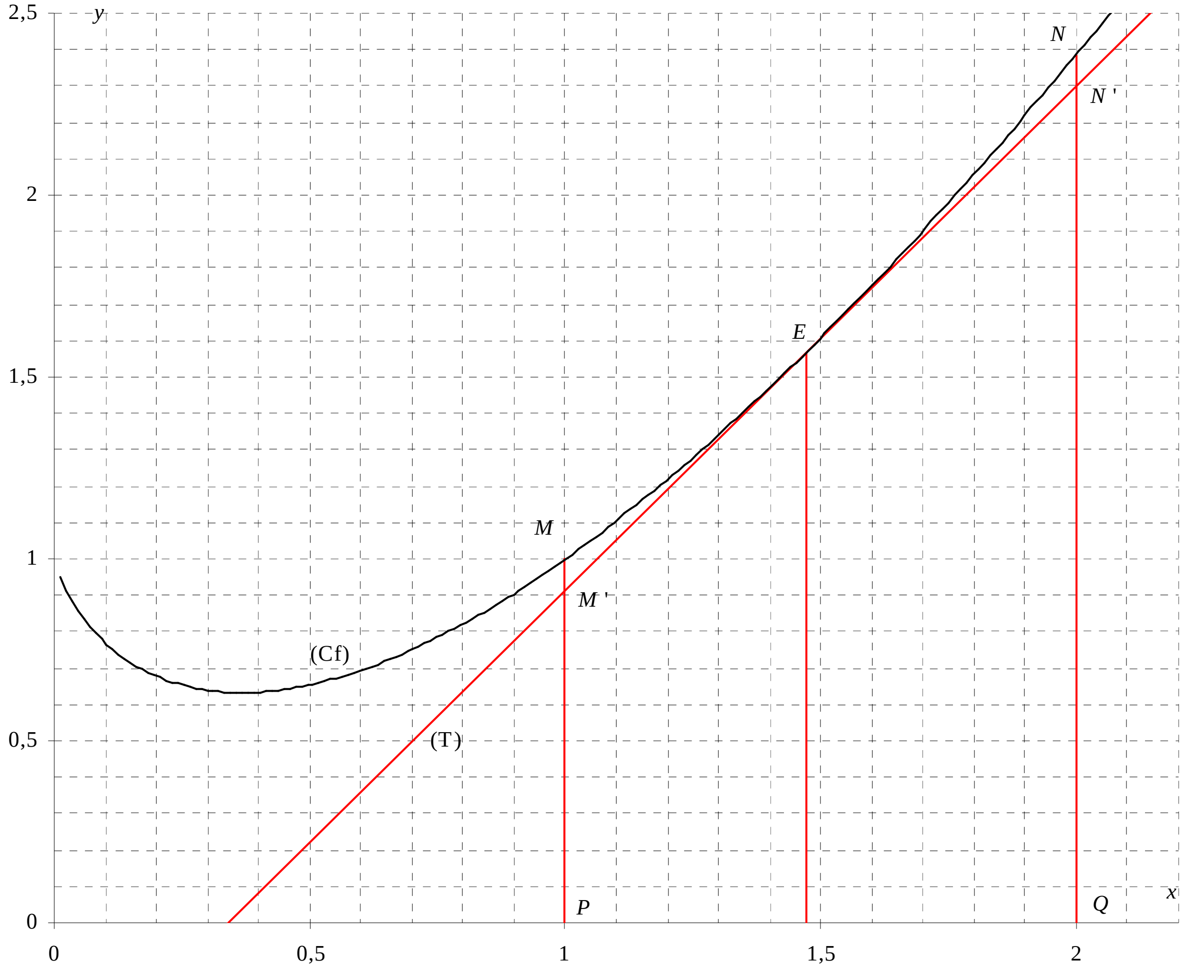
b. En déduire, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de $\boldsymbol{A}$ d'amplitude 10^{-1}.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de $\boldsymbol{A}$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^2 x\ln x\,dx$.

2. En déduire la valeur exacte de $\boldsymbol{A}$.



SUJET 38

Exercice 1

4 points

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. *Question de cours*

Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}(\,a, b, c\,)$ et un point $M_0\,(\,x_0, y_0, z_0\,)$.

2. On considère les points $A(1\,;2\,;-3)$, $B(-3\,;1\,;4)$ et $C(2\,;6\,;-1)$.

a. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

b. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + 3 = 0$.

c. Soit I le point de coordonnées $(-5\,;9\,;4)$. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D passant par I et perpendiculaire au plan (ABC).

d. Déterminer les coordonnées du point J, intersection de la droite D et du plan (ABC).

e. En déduire la distance du point I au plan (ABC).

Exercice 2

4 points

Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte les points attribués à la question, une réponse inexacte enlève la moitié des points attribués à la question, l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

A. Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant.

Question 1 : La probabilité de tirer trois boules noires est :

a. $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$	b. $\dfrac{9}{8}$	c. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$	d. $\dfrac{4\times3\times2}{8\times7\times6}$

Question 2 : Sachant que Jean a tiré 3 boules de lamême couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est :

a. 0	b. $\left(\dfrac{1}{8}\right)^3$	c. $\dfrac{23}{128}$	d. $\dfrac{1}{92}$

B. Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = x + m$ où m est une constante réelle.

Question 3 : f est une densité de probabilité sur l'intervalle [0 ; 1] lorsque :

a. $m = -1$	b. $m = \dfrac{1}{2}$	c. $m = e^{\frac{1}{2}}$	d. $m = e^{-1}$

C. La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre 0,2.

Question 4 : La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est :

a. $1-\dfrac{1}{e}$	b. $\dfrac{1}{e}$	c. $\dfrac{1}{5e}$	d. $\dfrac{1}{0,2}(e-1)$

Exercice 3 Tle c

5 points

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 24 ; 25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $(an + b)$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante :

étape 1 : on lui associe l'entier $n = 15$;

étape 2 : le reste de la division de $2\times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7 ;

étape 3 : on associe 7 à H.

Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend $a = 0$?

2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.

3. Dans toute la suite de l'exercice, on prend $a = 5$ et $b = 2$.

a. On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p. Montrer, que si $5n + 2$ et $5p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n - p$ est un multiple de 26. En déduire que $n = p$.

b. Coder le mot AMI.

4. On se propose de décoder la lettre E.

a. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5n - 26y = 2$, où y est un entier.

b. On considère l'équation $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.

i. Donner une solution particulière de l'équation $5x - 26y = 2$.

ii. Résoudre alors l'équation $5x - 26y = 2$.

iii. En déduire qu'il existe un unique couple $(x ; y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \leq x \leq 25$.

c. Décoder alors la lettre E.

Exercice 4

7 points

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

PARTIE A

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$.

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

1. a. Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement : $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{n}$.

b. Vérifier que $\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{n} - f(n)$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$.

2. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+1)}.$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq f(n)+f(n+1)+...+f(2n) \leq S_n$.

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de −1 et de 0, on ait

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

c. En déduire l'égalité $S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$.

d. En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=n}^{k=2n} f(k) = f(n)+f(n+1)+...+f(2n).$$

e. Vérifier que pour tout entier $n > 1$, $f(n)+f(n+1)+...+f(2n) = u_n - \ln\left(2+\frac{1}{n}\right)$.

f. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Correction sujet 38 inscrivez vous ou acheter le livre

SUJET 39 et son corrigé

Exercice 1

4 points

1. Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.

On suppose connu le résultat suivant : La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.

Soit a un réel donné.

a. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.

b. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)e^{-ax}$.

Montrer que h est une fonction constante.

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = a\cos x + b\sin x$ soit une solution f_0 de (E).

b. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$.

c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).

d. En déduire les solutions de (E).

e. Determiner la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Correction

a. $f'(x)=ae^{ax}=af(x)$ donc $f(x)=e^{ax}$ est solution de l'équation $y'=ay$.

b. $h'(x)=g'(x)e^{-ax}-ag(x)e^{-ax}=ag(x)e^{-ax}-ag(x)e^{-ax}=0 \Rightarrow h(x)=K$.

c. $h(x)=K=g(x)e^{-ax} \Rightarrow g(x)=Ke^{ax}$.

2. $f_0(x)=a\cos x+b\sin x$ est solution de l'équation différentielle (E) : $y'=2y+\cos x$ si

a. $f_0'(x)=2f_0(x)+\cos x \Leftrightarrow -a\sin x+b\cos x=2(a\cos x+b\sin x)+\cos x \Rightarrow \begin{cases}-a=2b\\ b=2a+1\end{cases} \Rightarrow b=\frac{1}{5},\ a=-\frac{2}{5}$.

b. $y'=2y$ a pour solutions $y=Ke^{2x}$.

c. *f* est solution de (E) si et seulement si $\begin{cases}f'=2f+\cos x\\ f_0'=2f_0+\cos x\end{cases} \Leftrightarrow f'-f_0'=2(f-f_0)$, soit $f-f_0$ solution de (E_0).

d. Les solutions de (E) sont données par $f-f_0=Ke^{2x} \Leftrightarrow f(x)=\left(-\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x\right)+Ke^{2x}$.

e. $k\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(-\frac{2}{5}\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{\pi}{2}\right)+Ke^{2\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{5}+Ke^{\pi}=0 \Leftrightarrow K=-\frac{1}{5}e^{-\pi}$.

Exercice 2 tle c

5 points

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. On considère les points *A* d'affixe 1 et *B* d'affixe *i*. On appelle *S* la réflexion (symétrie axiale) d'axe (*AB*).

Montrer que l'image *M'* par *S* d'un point *M* d'affixe *z* a pour affixe $z'=-i\bar{z}+1+i$.

2. On note *H* l'homothétie de centre *A* et de rapport −2. Donner l'écriture complexe de *H*.

3. On note *f* la composée $H\circ S$.

a. Montrer que *f* est une similitude.

b. Déterminer l'écriture complexe de *f*.

4. On appelle *M''* l'image d'un point *M* par *f*.

a. Démontrer que l'ensemble des points *M* du plan tels que $\overrightarrow{AM''}=-2\overrightarrow{AM}$ est la droite (*AB*).

b. Démontrer que l'ensemble des points *M* du plan tels que $\overrightarrow{AM''}=2\overrightarrow{AM}$ est la perpendiculaire en *A* à la droite (*AB*).

Exercice 2

5 points

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

Soit *f* l'application qui à tout point *M* de P d'affixe non nulle *z* associe le point *M'* d'affixe : $z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

1. Soit E le point d'affixe $z_E = -i$. Déterminer l'affixe du point E' image de E par f.

2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.

3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et –1. Soit M un point distinct des points O, A et B.

a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et –1, on a : $\dfrac{z'+1}{z'-1} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$.

b. En déduire une expression de $\dfrac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\dfrac{MB}{MA}$ puis une expression de l'angle $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right)$ en fonction de l'angle $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$.

4. Soit Δ la médiatrice du segment [AB]. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ.

5. Soit Γ le cercle de diamètre [AB].

a. Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB).

b. Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par f ?

Correction

$z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

1. $z'_E = \dfrac{1}{2}\left(-i + \dfrac{1}{-i}\right) = 0$.

2. $z = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \Leftrightarrow 2z^2 = z^2 + 1 \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm 1$.

3. a. $\dfrac{z'+1}{z'-1} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + 1}{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1} = \dfrac{z^2 + 1 + 2z}{z^2 + 1 - 2z} = \dfrac{(z+1)^2}{(z-1)^2} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$.

b. $\dfrac{M'B}{M'A} = \dfrac{|1 - z'|}{|-1 - z'|} = \left|\dfrac{z'-1}{z'+1}\right| = \left|\dfrac{z+1}{z-1}\right|^2 = \left(\dfrac{MB}{MA}\right)^2$.

$\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) = \arg\left(\dfrac{z'+1}{z'-1}\right) = 2\arg\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) = 2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$.

4. M est un point de Δ : $MA = MB \Rightarrow \dfrac{M'B}{M'A} = 1^2 = 1 \Leftrightarrow M'B = M'A$; M' est un point de Δ.

5. a. M appartient à Γ : $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) = \pm 2\dfrac{\pi}{2} = \pm\pi$ donc M' appartient à (AB).

b. Si M' a pour affixe Z, où est M ? $Z = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \Leftrightarrow z^2 - 2Zz + 1 = 0$ qui a toujours une ou deux solutions. Tous les points ont des antécédents par f, qu'ils soient sur [AB] ou non.

Exercice 3

5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère le point A de coordonnées (–2 ; 8 ; 4) et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (1 ; 5 ; –1).

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives $x - y - z = 7$ et $x - 2z = 11$.

Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants. On donnera une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée (d').

Montrer que le vecteur de coordonnées (2 ; 1 ; 1) est un vecteur directeur de (d').

3. Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

4. On considère le point H de coordonnées (−3 ; 3 ; 5) et le point H' de coordonnées (3 ; 0 ; −4).

a. Vérifier que H appartient à (d) et que H' appartient à (d').

b. Démontrer que la droite (HH')est perpendiculaire aux droites (d) et (d').

c. Calculer la distance entre les droites (d) et (d'), c'est-à-dire la distance HH'.

5. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MH'}\cdot\overrightarrow{HH'} = 126$.

Exercice 4

6 points

1. On considère la fonction f_1 définie sur [0 ; $+\infty$ [par $f_1(x) = 2x - 2 + \ln\left(x^2+1\right)$.

a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

b. Déterminer la dérivée de f_1.

c. Dresser le tableau de variations de f_1.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n, définie sur [0 ; $+\infty$ [par

$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{n}.$$

a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

b. Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur [0 ; $+\infty$ [.

c. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur [0 ; $+\infty$ [.

d. Justifier que, pour tout entier naturel n, $0 < \alpha_n < 1$.

3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.

4. Étude de la suite (α_n)

a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.

b. En déduire qu'elle est convergente.

c. Utiliser l'expression $\alpha_n = 1 - \dfrac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.

Sujet 40

Exercice 1

6 points

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une urne contient 15 boules identiques indiscernables au toucher de couleur moire, blanche ou rouge. On sait de plus qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne. On tire au hasard simultanément 2 boules dans l'urne et on note leur couleur.

Soit l'événement G : « obtenir deux boules de même couleur ».

Partie A

On suppose que l'urne contient 3 boules noires et 7 boules blanches.

Calculer la probabilité de l'événement G.

Partie B

On note n, b et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.

1. On note $g(n, b, r)$ la probabilité en fonction de n, b et r de l'événement G.

Démontrer que $g(n, b, r) = \frac{1}{210}\left[n(n-1)+b(b-1)+r(r-1)\right]$.

2. Le but de cette question est de déterminer n, b et r de sorte que la probabilité $g(n, b, r)$ soit minimale.

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points N, B et R de coordonnées respectives $(15\,;0\,;0)$, $(0\,;15\,;0)$ et $(0\,;0\,;15)$ et soit M le point de coordonnées $(n\,;b\,;r)$.

On pourra se reporter à la figure ci-dessous.

a. Justifier qu'une équation du plan (NBR) est $x+y+z-15=0$.

b. En déduire que le point M est un point du plan (NBR).

c. Démontrer que $g(n, b, r) = \frac{1}{210}\left(OM^2 - 15\right)$.

d. Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR). Déterminer les coordonnées du point H.

e. En déduire les valeurs de n, b et r afin que le probabilité $g(n, b, r)$ soit minimale. Justifier que cette probabilité minimale est égale à $\frac{2}{7}$.

Partie C

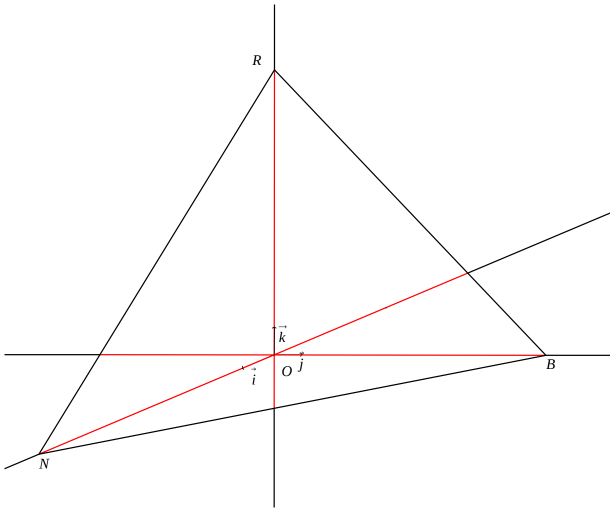
On suppose que les nombres de boules de chaque couleur ont été choisis par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'événement G soit égale à $\frac{2}{7}$.

Un joueur mise x euros, avec x entier naturel non nul, puis tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. Dans tous les cas, il perd sa mise de départ. S'il obtient deux boules de même couleur, il reçoit k fois le montant de sa mise, avec k nombre décimal strictement supérieur à 1. Sinon il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable X en fonction de x et k.

2. Déterminer la valeur de k pour laquelle le jeu est équitable.



Exercice 2

5 points

Partie A

1. Déterminer le complexe α tel que $\begin{cases} \alpha(1+i)=1+3i \\ i\alpha^2=-4+3i \end{cases}$.

2. Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z)=z^2-(1+3i)z+(-4+3i)$. Montrer que $f(z)$ s'écrit sous la forme $(z-\alpha)(z-i\alpha)$. En déduire les solutions (sous forme algébrique) de l'équation $f(z)=0$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 5 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a=2+i$ et $b=-1+2i$. Placer A et B dans le repère et compléter la figure au fur et à mesure.

Montrer que $b=ia$, en déduire que le triangle OAB est un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{2}$.

2. On considère le point C d'affixe $c=-1+\frac{1}{2}i$. Déterminer l'affixe du point D tel que le triangle OCD soit un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)=\frac{\pi}{2}$.

On pourra conjecturer l'affixe de D à l'aide de la figure pour traiter la question suivante.

3. Soit M le milieu du segment [BC]. On appelle $z_{\overrightarrow{OM}}$ et $z_{\overrightarrow{DA}}$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{DA}$.

Prouver que $\frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}}=\frac{1}{2}i$.

4. Donner une mesure en radians de $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{OM}\right)$.

5. Prouver que $OM=\frac{1}{2}DA$.

6. On appelle J, K et L les milieux respectifs des segments [CD], [DA] et [AB].

On admet que le quadrilatère *JKLM* est un parallélogramme ; démontrer que c'est un carré.

Exercice 2 (Tle c

5 points

ABC est un triangle équilatéral du plan tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Soit *t* un nombre réel fixé et soient les points *M*, *N* et *P*, deux à deux distincts, définis par :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BN} = t\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CP} = t\overrightarrow{CA}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence d'une unique similitude directe σ qui transforme les points *A*, *B* et *C* en respectivement *M*, *N* et *P*, et d'en préciser les éléments caractéristiques.

On munit le plan d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ direct. On note *a*, *b*, *c*, *m*, *n* et *p* les abscisses respectives des points *A*, *B*, *C*, *M*, *N* et *P*.

1. On rappelle que toute similitude conserve le barycentre.

a. Exprimer *m*, *n* et *p* en fonction de *a*, *b*, *c* et *t*.

b. En déduire que les deux triangles *ABC* et *MNP* ont même centre de gravité. On notera *G* ce centre de gravité.

c. On suppose que σ existe. Déterminer l'image de *G* par σ.

2. On considère la rotation *r* de centre *G* et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a. Vérifier que *M* est le barycentre du système de points $\left\{(A, 1-t)\,;(B, t)\right\}$ et en déduire que $r(M) = N$.

On admet de même que $r(N) = P$ et $r(P) = M$.

b. Soit σ_1 la similitude directe de centre G, de rapport $\frac{GM}{GA}$ et d'angle $\left(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM}\right)$. Montrer qu'elle transforme les points *A*, *B* et *C* respectivement en *M*, *N* et *P*.

c. Conclure sur l'existence et l'unicité de σ.

Exercice 3

5 points

Question de cours : soit *I* un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient *u* et *v* deux fonctions continues, dérivables sur *I* telles que les fonctions dérivées *u'* et *v'* soient continues sur *I*.

Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle [*a* ; *b*] de *I*.

Partie A

Soit *f* une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;1]$. On note f' la fonction dérivée de *f*. On suppose que f' est continue sur l'intervalle $[0\,;1]$.

1. Utiliser la question de cours pour montrer que $\int_0^1 f(x)\,dx = f(1) - \int_0^1 xf'(x)\,dx$.

2. En déduire que $\int_0^1 \left[f(x) - f(1)\right]dx = -\int_0^1 xf'(x)\,dx$.

Partie B

On désigne par ln la fonction logarithme néperien.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;2[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

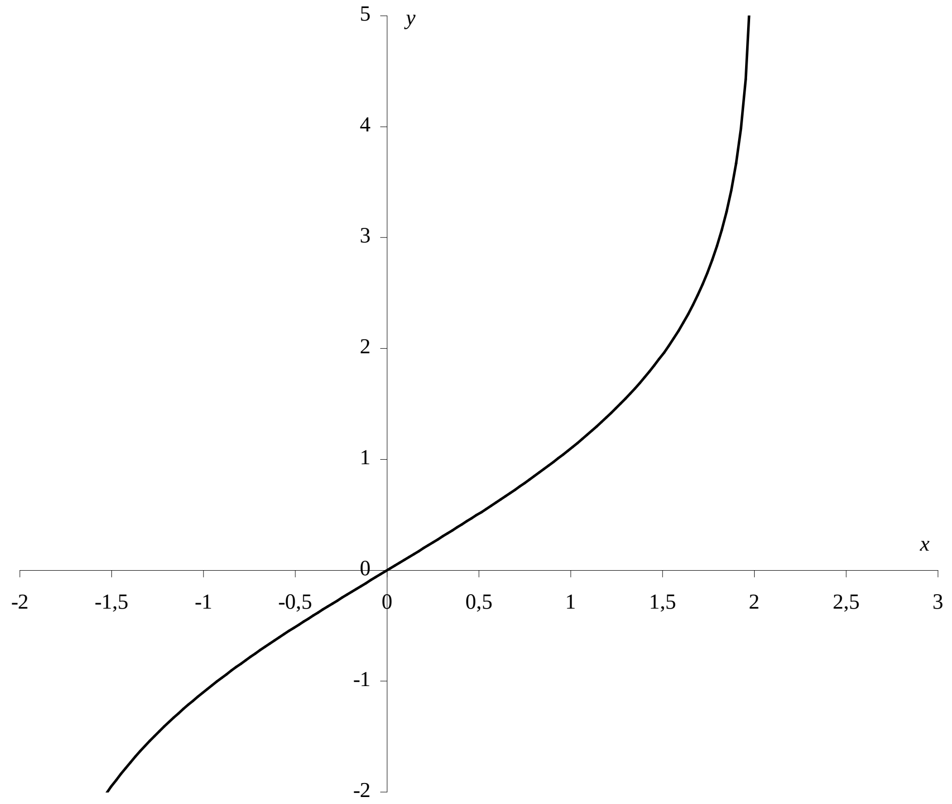
2. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2\,;2[$, on a $f'(x)=\dfrac{4}{4-x^2}$.

b. En déduire les variations de f sur l'intervalle $]-2\,;2[$.

Partie C

Le courbe C est tracée ci-dessous. Hachurer la partie P du plan constituée des points $M(x\,;y)$ tels que : $0\leq x\leq 1$ et $f(x)\leq y\leq \ln 3$.

En utilisant la partie A, calculer en cm² l'aire de P.



Exercice 4

4 points

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite. On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n=e^{-v_n}+1$.

Partie A

Pour chacune des questions quatre propositions sont faites dont une seule est exacte. Pour chaque question donner sans justification une réponse sur votre copie. Si la réponse est bonne elle rapporte 0,75 points, si elle est *mauvaise elle coûte 0,25 points, si vous ne répondez pas vous gagnez 0 point… En cas de total négatif votre ardoise est effacée !*

1. a est un réel strictement positif et ln désigne la fonction logarithme néperien. Si $v_0 = \ln a$, alors :

a. $u_0 = \frac{1}{a} + 1$ b. $u_0 = \frac{1}{1+a}$ c. $u_0 = -a + 1$ d. $u_0 = e^{-a} + 1$

2. Si v est strictement croissante, alors :

a. u est strictement décroissante et majorée par 2

b. u est strictement croissante et minorée par 1

c. u est strictement croissante et majorée par 2

d. u est strictement décroissante et minorée par 1

3. Si v diverge vers $+\infty$ alors :

a. u converge vers 2

b. u diverge vers $+\infty$

c. u converge vers 1

d. u converge vers un réel L tel que $L > 1$

4. Si v est majorée par 2, alors :

a. u est majorée par $1 + e^{-2}$

b. u est minorée par $1 + e^{-2}$

c. u est majorée par $1 + e^{2}$

d. u est minorée par $1 + e^{2}$

<u>Partie B</u>

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\ln(u_n) + v_n > 0$.

Sujet 41

Exercice 1

5 points

Les parties 1 et 2 portent sur un même thème, la dérivation, mais sont indépendantes.

<u>1. Restitution organisée de connaissances</u>

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

P : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$.

Q : Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$.

2. On désigne par g la fonction définie sur $]-1\,;1[$ par $g(0) = 0$ et $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $]-1\,;1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.

On considère alors la fonction composée h définie sur $]-\pi\,;0[$ par $h(x) = g(\cos x)$.

a. Démontrer que pour tout x de $]-\pi\,;0[$ on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h.

b. Calculer $h\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ puis donner l'expression de $h(x)$.

Exercice 2

6 points

1. La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$ pour tout entier naturel n.

a. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan ci-dessous, la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$ et le point A de coordonnées (2 ; 0).
Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.

b. Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $l = \frac{23}{18}$.

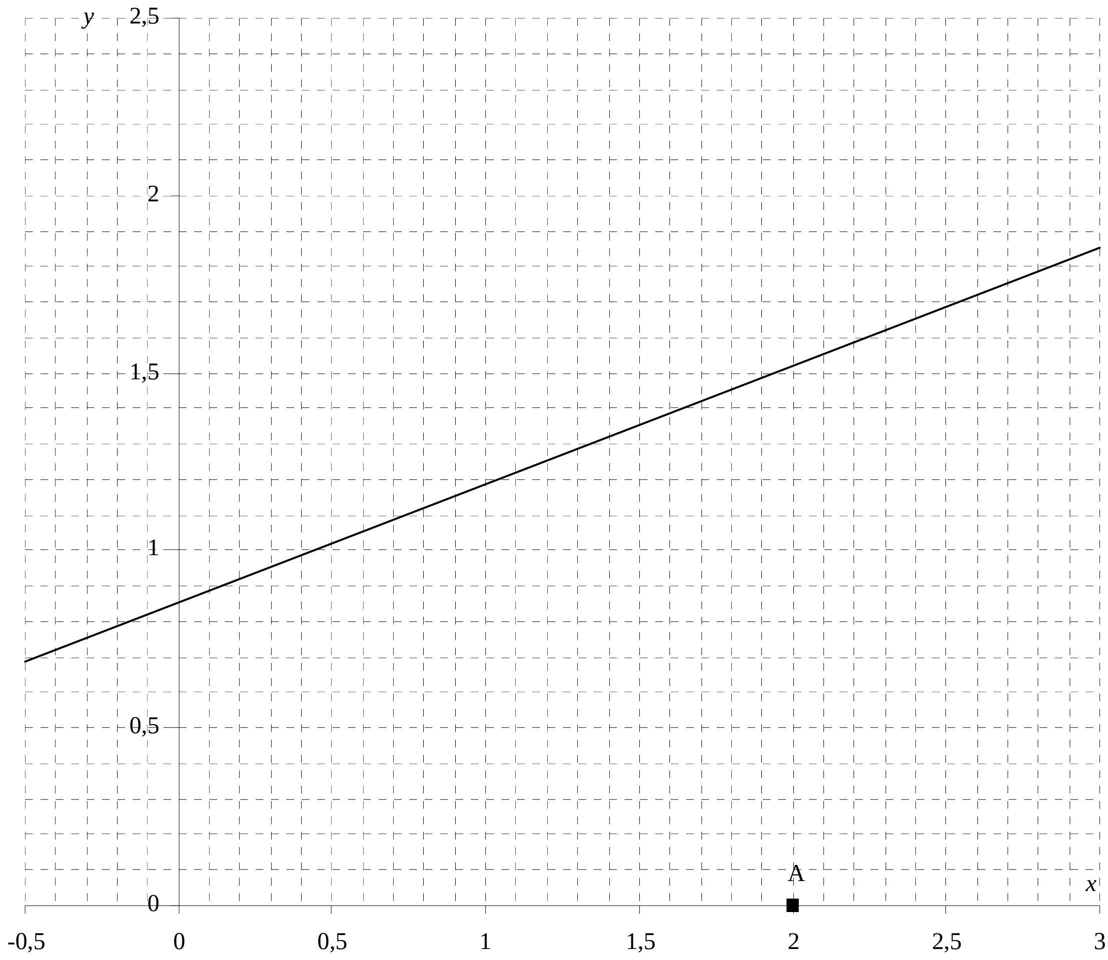
c. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n > \frac{23}{18}$.

d. Étudier lamonotonie de la suite u et donner sa limite.

2. a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que : $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$ c'est-à-dire que $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$.

b. La suite v est définie par $v_n = 1{,}277\,7\ldots7$ avec n décimales consécutives égales à 7.
Ainsi $v_0 = 1{,}2$, $v_1 = 1{,}27$ et $v_2 = 1{,}277$.
En utilisant le 2. a. démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).

3. La suite u définie au 1. et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.



Exercice 3

5 points

Soit les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = 2 + 2i$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Écrire Z sous forme algébrique.
2. Donner les modules et arguments de z_1, z_2 et Z.
3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z. Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).

5. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007} .

Exercice 3 (Tlec

5 points

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$.

a. Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1[7]$ (soit modulo 7).

a	1	2	3	4	5	6
y						

b. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5[7]$ équivaut à $x \equiv 4[7]$.

c. Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0[7]$ sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.

On considère l'ensemble $A_p = \{1\,;2\,;...\,;p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p.

a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1[p]$.

b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution dans A_p de l'équation $ax \equiv 1[p]$.

c. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0[p]$ si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p.

d. Application : $p = 31$.

Résoudre dans A_{31} les équations $2x \equiv 1[31]$ et $3x \equiv 1[31]$.

A l'aide des résultats précédents résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0[31]$.

Exercice 4

4 points

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$:

(E) : $y' + (1+\tan x)y = \cos x$,

(E₀) : $y' + y = 1$.

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E₀).

2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et telles que $f(x) = g(x)\cos x$.

Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E₀).

3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

Sujet 42

Exercice 1

7 points

On désigne par (E) l'ensemble des fonctions *f* continues sur l'intervalle $[0\,;1]$ et vérifiant les conditions P_1, P_2 et P_3 suivantes :

P_1 : *f* est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.

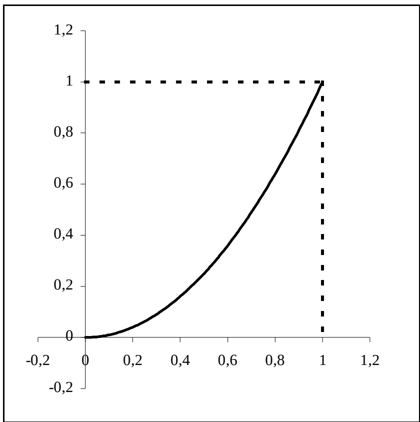
P_2 : $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

P_3 : Pour tout réel *x* de l'intervalle $[0\,;1]$, $f(x)\leq x$.

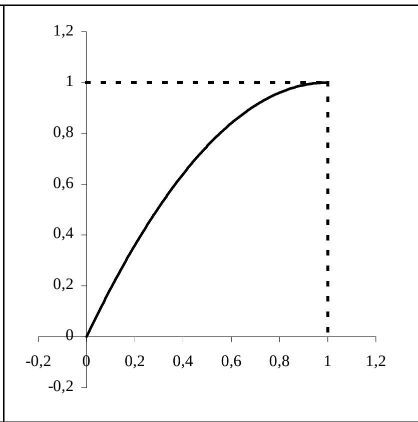
Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan, on note (C) la courbe représentative d'une fonction *f* de l'ensemble (E) et (D) la droite d'équation $y=x$.

A toute fonction *f* de (E) on associe le nombre réel $I_f=\int_0^1\left[x-f(x)\right]dx$.

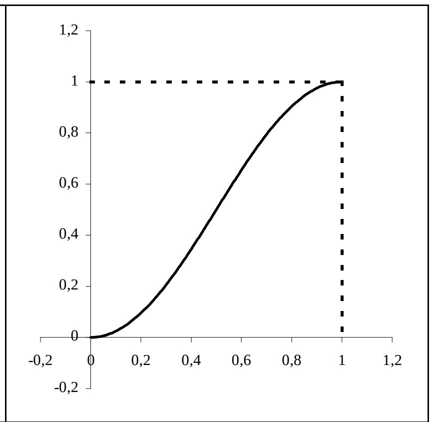
1. a. Une seule des trois courbes ci-dessous représente une fonction de (E). La déterminer en justifiant l'élimination des deux autres.



Courbe n°1



Courbe n°2



Courbe n°3

b. Montrer que, pour toute fonction *f* de (E), $I_f\geq 0$.

2. Soit *h* la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $h(x)=2^x-1$ (on rappelle que pour tout réel *x*, $2^x=e^{x\ln 2}$).

a. Montrer que la fonction *h* vérifie les conditions P_1 et P_2.

b. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $\varphi(x)=2^x-x-1$.

Montrer que, pour tout x de $[0\,;1]$, $\varphi(x)\leq 0$ (on pourra étudier les variations de φ sur $[0\,;1]$). En déduire que la fonction h appartient à l'ensemble (E).

c. Montrer que le réel I_h associé à la fonction h est égal à $\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln 2}$.

3. Soit *P* une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $P(x)=ax^2+bx+c$ où *a*, *b* et *c* sont trois nombres réels avec $0<a<1$. On se propose de déterminer les valeurs des réels *a*, *b* et *c* pour que la fonction *P* appartienne à l'ensemble (E) et que $I_P=I_h$.

a. Montrer que la fonction *P* vérifie la propriété P_2 si et seulement si, pour tout réel de l'intervalle $[0\,;1]$, $P(x)=ax^2+(1-a)x$.

Montrer que toute fonction *P* définie sur $[0\,;1]$ par $P(x)=ax^2+(1-a)x$ avec $0<a<1$ appartient à (E).

b. Exprimer en fonction de *a* le réel I_P associé à la fonction *P*.

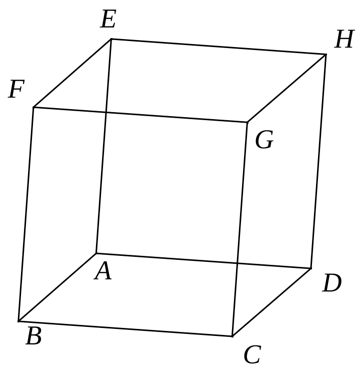
c. Montrer qu'il existe une valeur du réel *a* pour laquelle $I_P=I_h$. Quelle est cette valeur ?

Exercice 2

4 points

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 3.

On choisit le repère orthonormal $(D\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tel que $\vec{i}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$, $\vec{j}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, $\vec{k}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.



1. a. Donner les coordonnées des points *A*, *C*, *E*.

b. Déterminer les coordonnées du point *L* barycentre du système {(*C*, 2) ; (*E*, 1)}.

c. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$.

2. Soit (a,b) un couple de réels. On note *M* le point de la droite (AE) tel que $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AE}$ et *N* le point de la droite (DL) tel que $\overrightarrow{DN}=b\overrightarrow{DL}$.

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ si et seulement si le couple (a,b) vérifie le système $\begin{cases}-a+2b=1\\3a-b=0\end{cases}$.

b. En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

c. Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0.

Exercice 3

4 points

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes : 40 % de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.

On admet qu'au début de chaque année :

- chaque plante de type A disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.

- chaque plante de type B disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type C disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type B est 0,3.

La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type A est 0,3.

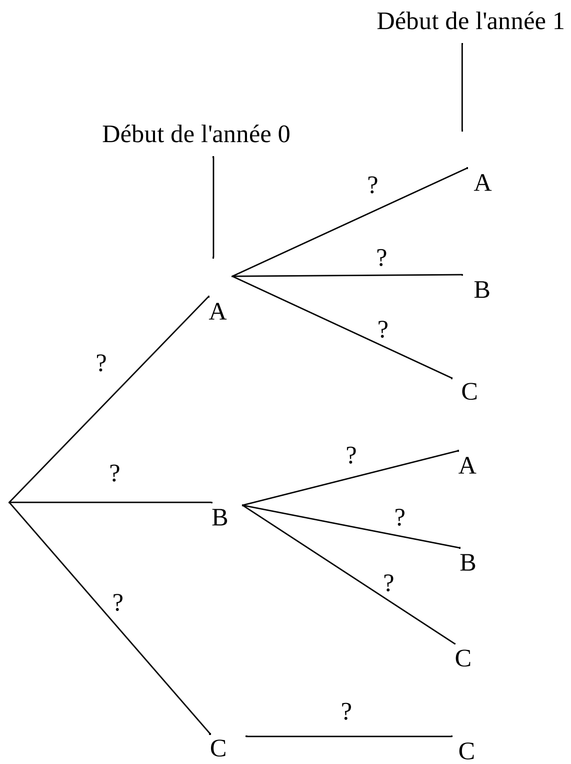
Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- A_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type A »,
- B_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type B »,
- C_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type C ».

On désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des vénements A_n, B_n et C_n. Compte tenu de la composition initiale de la végétation (année 0), on pose $p_0 = 0,40$, $q_0 = 0,41$ et $r_0 = 0,19$.

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interro-gation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



2. a. Montrer que $p_1 = 0,363$ puis calculer q_1 et r_1.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $\begin{cases} p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} = 0,3p_n + 0,6q_n \end{cases}$.

3. On définit les suites (S_n) et (D_n) sur $\mathbb{N}$ par :

$$S_n = p_n + q_n \text{ et } D_n = p_n - q_n.$$

a. Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. On admet que (D_n) est une suite géométrique de raison 0,3.

b. Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n).

c. En déduire les limites des suites (p_n), (q_n) et (r_n).

Interpréter le résultat.

Exercice 4 Tle c

5 points

Pour cet exercice, les figures correspondant aux parties A et B sont fournies ci-dessous.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On considère un triangle OAB et une similitude directe σ de centre O, de rapport λ et d'angle θ.

Soit :

- les points A' et B' images respectives des points A et B par la similitude σ ;
- les points I, milieu du segment $[A'B]$ et J, milieu du segment $[AB']$;
- le point M milieu du segment $[AA']$;
- le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AB) et le point H' image du point H par σ .

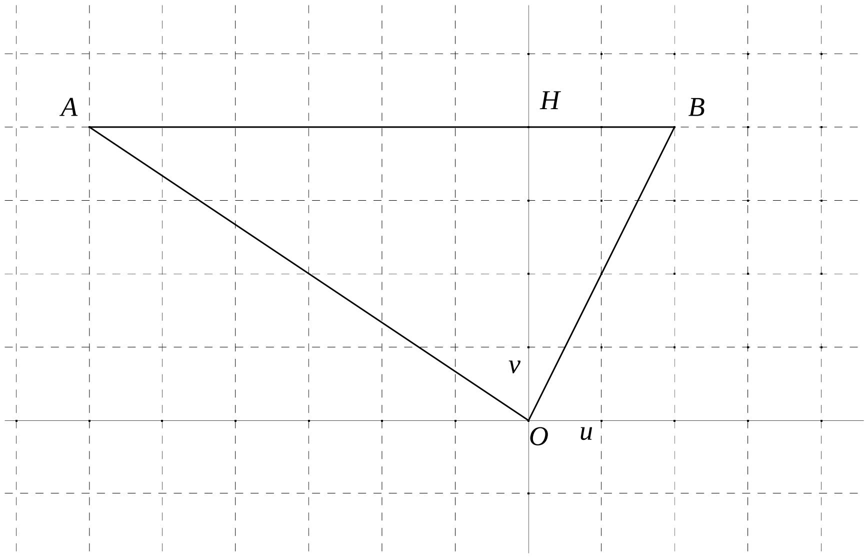
Partie A : Etude d'un exemple

Dans cette partie, le point A a pour affixe $-6+4i$, le point B a pour affixe $2+4i$, et le point H a donc pour affixe $4i$.

La similitude σ est la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer les affixes des points A', B' et H'.

2. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH').



Partie B : Etude du cas général

1. a. Montrer que H' est le projeté orthogonal du point O sur la droite $(A'B')$.

b. Montrer que $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. On admet que $\overrightarrow{MJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$.

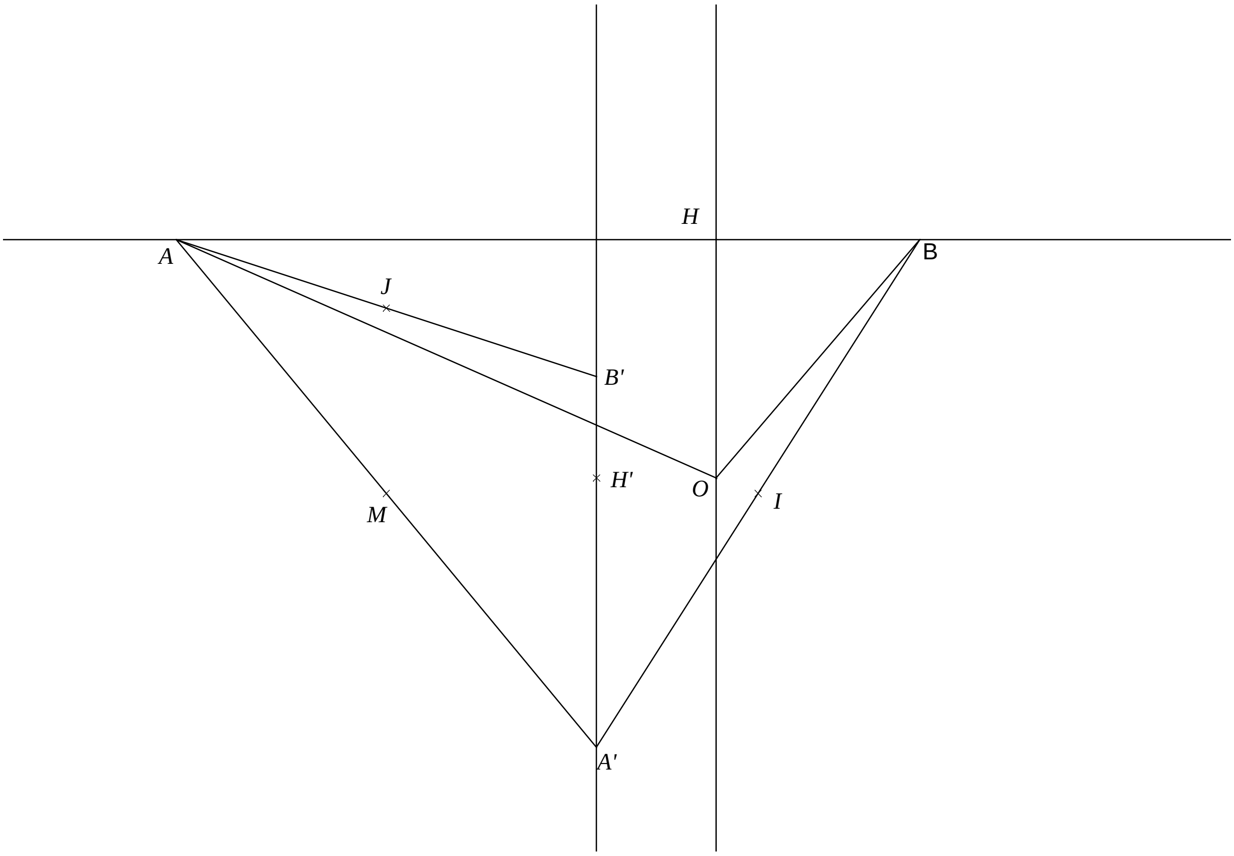
c. En déduire que $\frac{MJ}{MI}=\frac{OH'}{OH}$ et que $\left(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MJ}\right)=\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OH'}\right)+k\times 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

2. On appelle s la similitude directe qui transforme M en O et I en H. On note K l'image du point J par la similitude s.

a. Montrer que $OK=OH'$, puis que $\left(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OH'}\right)=0+k\times 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

b. En déduire que le point H' est l'image du point J par la similitude s.

3. Montrer que $\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{HH'}\right)=\left(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{OH}\right)+k\times 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH').



" Quand les ailes poussent à la fourmi, c'est pour sa perte. "

Nous mettons une pause là pour cette année.

Par Hugues Sila, PDG du groupe Al Kashi
Bonne chance