

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1; 2; -1)$, $B(1; 1; 0)$, $C(9; -1; -2)$, $S(1; 1; 1)$.

On admet qu'une équation du plan (ABC) est $x + 2y + 2z - 3 = 0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

a. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 4t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad (t \text{ réel})$	b. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \text{ réel})$	c. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \text{ réel})$
---	---	--

2. Les coordonnées du point S' symétrique du point S par rapport au plan (ABC) sont :

a. $\left(\frac{10}{9}; \frac{11}{9}; \frac{10}{9}\right)$	b. $\left(\frac{5}{9}; \frac{1}{9}; \frac{1}{9}\right)$	c. $\left(\frac{7}{9}; \frac{5}{9}; \frac{5}{9}\right)$
---	--	--

3. Le triangle ABC est :

- | | | |
|-------------------|--------------------------|--------------------------|
| a. isocèle | b. rectangle en A | c. rectangle en B |
|-------------------|--------------------------|--------------------------|

4. L'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 9$ est :

- | | | |
|---------------------------------|------------------------------------|----------------------------------|
| a. un plan passant par S | b. une sphère passant par S | c. une sphère de centre S |
|---------------------------------|------------------------------------|----------------------------------|

EXERCICE 2

5 points

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On désigne par A, B et J les points d'affixes respectives $-i$, $1 - i$ et i .

On désigne par Δ la médiatrice du segment [AB] et par \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon 1.

À tout point M d'affixe z distincte de $1 - i$, on associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{i(z+i)}{z-1+i}.$$

Le point M' est appelé image du point M .

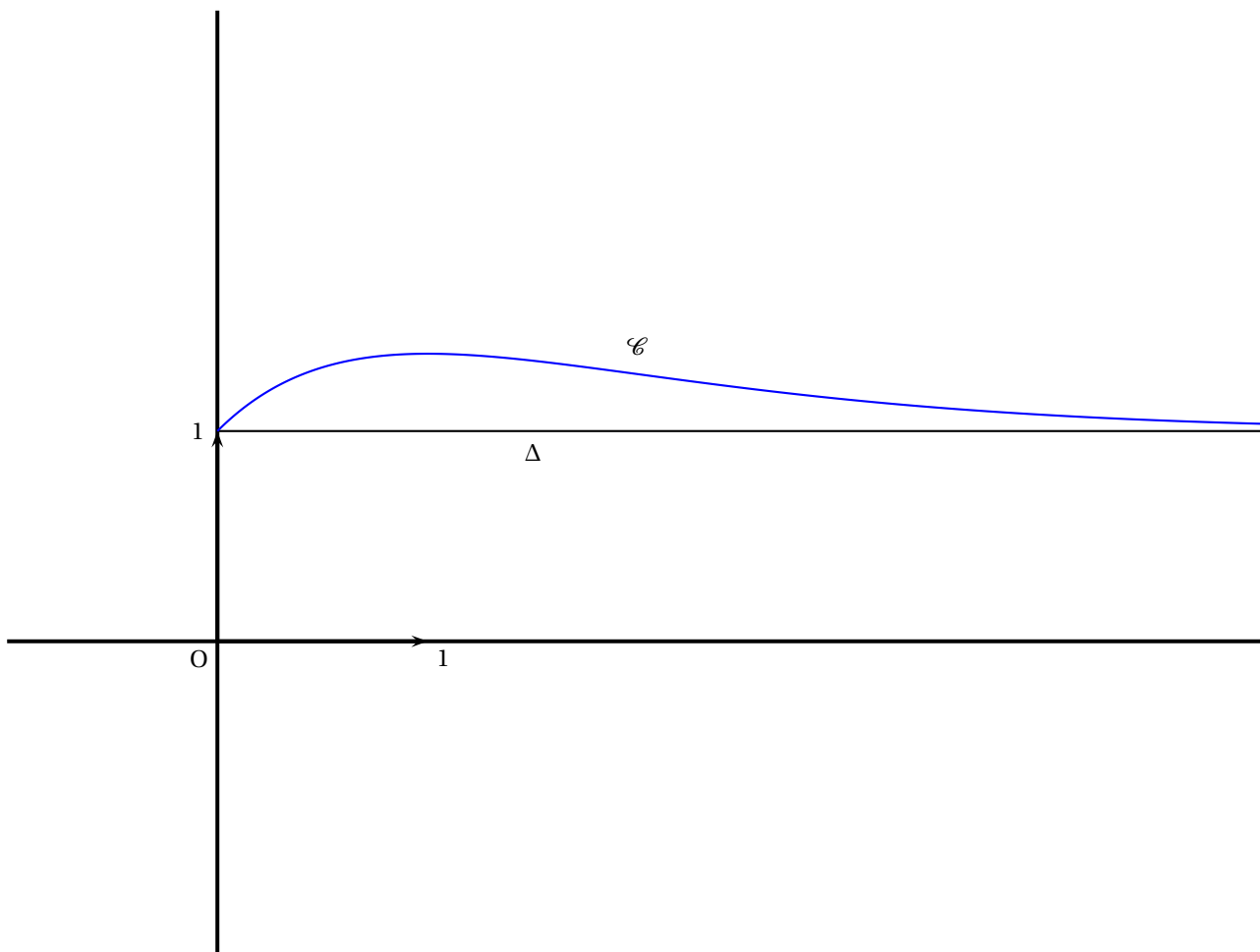
1. Calculer les affixes des points A' et O'.
2. Sur la feuille de papier millimétré, faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice (unité graphique 4 cm).
3. Montrer que l'équation $z = \frac{i(z+i)}{z-1+i}$ admet deux solutions que l'on précisera.
On note E et F les points qui ont pour affixes respectives ces solutions.
Justifier que les points E et F appartiennent au cercle \mathcal{C} et les placer sur la figure.
4. Soit M un point distinct du point B et M' son image.
 - a.** Exprimer la distance OM' en fonction des distances AM et BM .
 - b.** Montrer que si le point M décrit la droite Δ , alors le point M' décrit un cercle que l'on précisera.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Montrer que si le point M décrit la droite (AB) privée du point B, alors le point M' appartient à une droite que l'on précisera.

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + xe^{-x}.$$

Sa courbe représentative \mathcal{C} dans le repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) et la droite Δ d'équation $y = 1$ sont tracées ci-dessous.

**Partie A**

1. Justifier les propriétés suivantes constatées sur la représentation graphique.

- La droite Δ est asymptote à la courbe \mathcal{C} en $+\infty$.
- La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

2. Soit t un nombre réel positif. On considère l'intégrale $\int_0^t f(x) dx$.

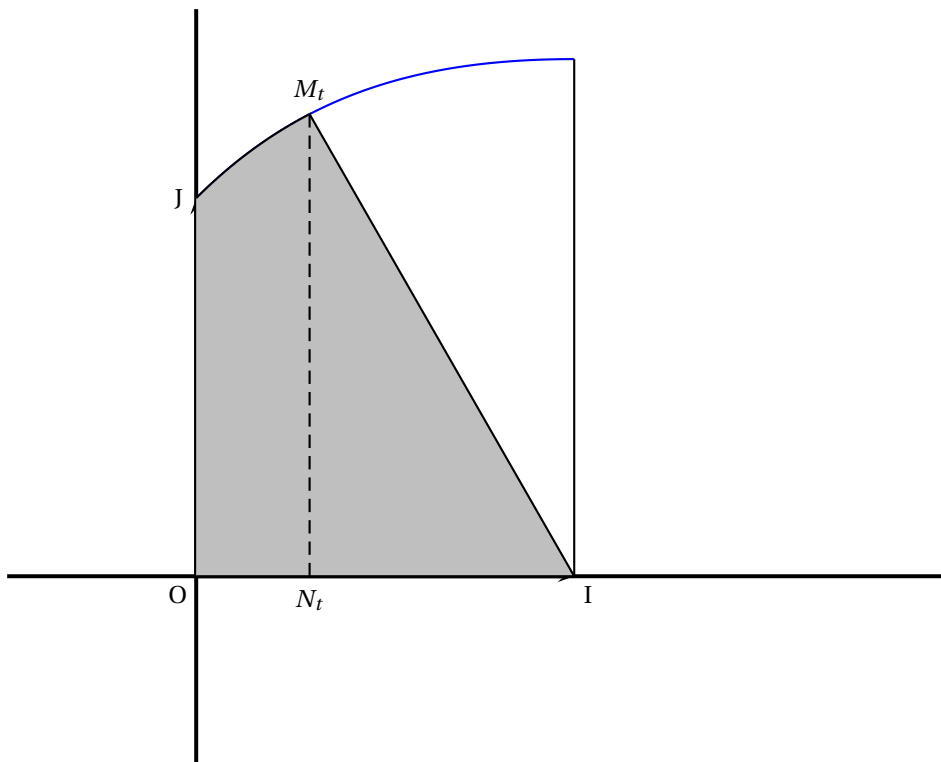
- Interpréter graphiquement cette intégrale.
- Montrer que $\int_0^t f(x) dx = t - te^{-1} - e^{-t} + 1$.

Partie B

On note I le point de coordonnées $(1 ; 0)$ et J le point de coordonnées $(0 ; 1)$.

Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0 ; 1]$, M_t désigne le point de la courbe \mathcal{C} d'abscisse t et N_t le point de coordonnées $(t ; 0)$.

On appelle \mathcal{D}_t , le domaine du plan délimité par la droite (IM_t) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées la courbe \mathcal{C} . Ce domaine est représenté par la zone grisée du graphique ci-joint. Soit $\mathcal{A}(t)$ la mesure de son aire exprimée en unité d'aire.



1. Interpréter graphiquement $\mathcal{A}(0)$ et donner sa valeur exacte.
2. Interpréter graphiquement $\mathcal{A}(1)$ et donner sa valeur exacte.
3. Calculer l'aire du triangle $M_t N_t I$.
4. En déduire que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0; 1]$,

$$\mathcal{A}(t) = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + 1 \right) e^{-t}.$$

5. Dans cette question toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Existe-t-il un unique nombre réel α de l'intervalle $[0; 1]$ tel que

$$\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{2} \times \mathcal{A}(1) ?$$

Justifier la réponse.

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et pour tout nombre entier naturel n ,

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

- a. Calculer u_2 , u_3 et u_4 .
- b. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.
- c. Sur l'annexe à rendre avec la copie, sont tracées, dans un repère orthonormal les droites d'équation respectives $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 3$.

À partir de u_0 , en utilisant ces deux droites, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière placer les termes u_2 , u_3 et u_4 .

Que peut-on conjecturer sur les variations et la convergence de cette suite ?

2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n , par $v_n = u_n - 6$.

- a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Soit (w_n) la suite de premier terme w_0 et telle que, pour tout nombre entier naturel n , $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 3$.
On suppose que w_0 est strictement supérieur à 6.
Les suites (u_n) et (w_n) sont-elles adjacentes? Justifier.

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

