Numération

1. Base de numération des entiers naturels

Notre système de numération est dit **décimal de position**. Cela signifie que

- on utilise dix symboles appelés **chiffres** pour écrire tout nombre **entier naturel** N
- la position de chaque chiffre du **nombre** N a la signification suivante (exemple pour un nombre de cinq chiffres a, b, c, d, e, que l'on note $\underline{abcde}$):

si $\boldsymbol{N = \underline{abcde}}$, alors $\boldsymbol{N = a\times 10^4 + b\times 10^3 + c\times 10^2 + d\times 10^1 + e\times 1}$.

Plus généralement, si $N' = \underline{abcde}_k$, alors $N = a\times k^4 + b\times k^3 + c\times k^2 + d\times k^1 + e\times 1$ (avec k entier : on dit qu'on a écrit l'entier N' en base k : cela nécessite l'utilisation de k symboles).

Exemples : $345 = 3\times 10^2 + 4\times 10^1 + 8\times 1$ *(3 centaines, 4 dizaines, 5 unités).*

$\underline{175}_8 = 1\times 8^2 + 7\times 8^1 + 5\times 1 = 125$

$125 = \underline{1000}_5$, car $125 = 1\times 5^3 + 0\times 5^2 + 0\times 5^1 + 0\times 1$

2. Multiples et diviseurs

Définition 1 : On dit que $\boldsymbol{M}$ **est un multiple de** $\boldsymbol{a}$ (ou que $\boldsymbol{a}$ **est un diviseur de** $\boldsymbol{M}$) si et seulement si il existe un **entier** q tel que $\boldsymbol{M = a\times q}$.

Cas particulier : N est **pair** si et seulement si N est un multiple de 2 (d'où $\boldsymbol{N = 2q}$, avec q entier).
Si N n'est pas pair, on dit que N est **impair** (d'où $\boldsymbol{N = 2q + 1}$, avec q entier).

Propriété : Critères de divisibilité usuels :

- Un nombre N est divisible par 2 si et seulement si N est pair.
- Un nombre N est divisible par 5 si et seulement si N se termine par 0 ou 5.
- Un nombre N est divisible par 3 si et seulement si la somme des chiffres de N est un multiple de 3.
- Un nombre N est divisible par 9 si et seulement si la somme des chiffres de N est un multiple de 9.

Définition 2 : On dit que N est **premier** si et seulement si il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples : 15 *n'est pas premier, car* $15 = 5\times 3$ *: on constate que* 15 *a d'autres diviseurs que* 1 *et* 15.
53 *est premier : ses seuls diviseurs sont* 1 *et* 53.

Méthode pratique : pour montrer qu'un entier N est premier, il suffit de montrer qu'il n'est pas divisible par tous les entiers premiers qui sont inférieurs ou égaux à $\sqrt{N}$ *. Pouvez-vous expliquer pourquoi ?*

Définition 3 : On dit que deux entiers N_1 et N_2 sont **premiers entre eux** si et seulement si leur seul diviseur commun est 1.

Exemples : 15 *et* 48 *ne sont pas premiers entre eux, car ils sont tout deux divisibles par* 3.
5 et 9 *sont premiers entre eux : leur seul diviseur commun est* 1.

Théorème de Gauss

$$\text{Si } \left.\begin{array}{l} a \text{ divise } N \\ b \text{ divise } N \\ a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux} \end{array}\right\} \text{ alors } a\times b \text{ divise } N.$$

3. Division euclidienne

Théorème : a et b étant deux entiers naturels, il **existe** deux **entiers** q et r **uniques** tels que :

$$\begin{cases} a = b\times q + r \\ 0 \le r < b \end{cases}.$$

Définition 3 : On dit que les deux entiers q et r sont le **quotient** et le **reste** de la **division euclidienne de** $\boldsymbol{a}$ **par** $\boldsymbol{b}$. L'entier a s'appelle le **dividende**, l'entier b s'appelle le **diviseur**.

Propriété : a et b étant deux entiers naturels, il existe un entier unique q tel que

$$bq \le a < b(q + 1).$$

Interprétation graphique : graduation par pas de mesure b.