Baccalauréat S Liban 11 juin 2009

EXERCICE 1 **3 points**

Pour chacune des trois questions, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie, sans justification.
Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On désigne par A et B deux évènements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité p.
On sait que $p(A \cup B) = \dfrac{4}{5}$ et $p\left(\overline{A}\right) = \dfrac{3}{5}$.
La probabilité de l'évènement B est égale à :

a. $\dfrac{2}{5}$ **b.** $\dfrac{2}{3}$ **c.** $\dfrac{3}{5}$ **a.** $\dfrac{1}{2}$

2. On note X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,04$.
On rappelle que pour tout réel t positif, la probabilité de l'évènement $(X \leqslant t)$, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
La valeur approchée de $p(X > 5)$ à 10^{-2} près par excès est égale à :

a. $0,91$ **b.** $0,18$ **c.** $0,19$ **d.** $0,82$

3. Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.
S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{10}$; s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{9}{10}$.
Je sors mon chien ; la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à :

a. $\dfrac{9}{10}$ **a.** $\dfrac{27}{40}$ **a.** $\dfrac{3}{4}$ **a.** $\dfrac{27}{28}$

EXERCICE 2 **8 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{3}x.$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée en annexe.
Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$. Tracer (D).

c. Étudier la position relative de (D) et de $(\mathscr{C})$.

d. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - \dfrac{2}{3}x$.

e. En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 2}{3\left(\mathrm{e}^x + 1\right)}$.

b. En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n, l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n = \displaystyle\int_0^n \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$.
2. On admet que pour tout réel x, $\ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
   Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \leqslant 1$. La suite $(d_n)_{n \geqslant 1}$ est-elle convergente ?

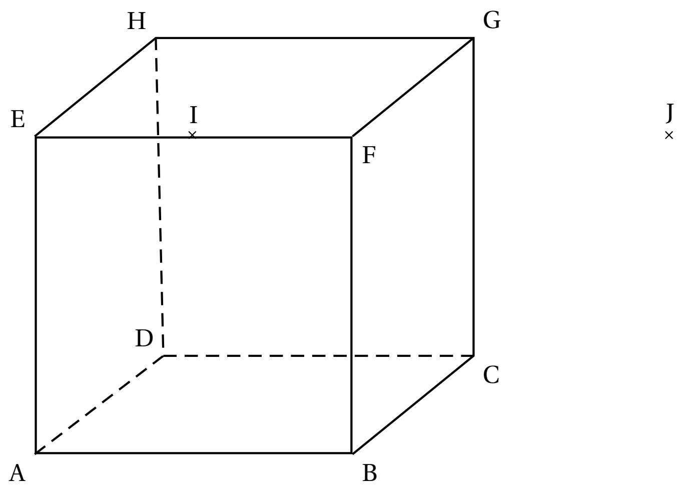
Partie C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe $(\mathscr{C})$.
On note (T) la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soient M et N deux points de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

EXERCICE 3 **4 points**

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On désigne par l le milieu de [EF] et par J le symétrique de E par rapport à F.
Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.



1. a. Déterminer les coordonnées des points l et J.

b. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{\text{DJ}}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

c. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).

d. Calculer la distance du point F au plan (BGI).

2. On note (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

a. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b. Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face ADHE.

c. Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{6}\ ;\ \frac{5}{6}\right)$.

d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?

EXERCICE 4 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On considère les points A, B et C d' affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -\frac{3}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_{\text{B}} = \overline{z_{\text{A}}} \text{ et } z_{\text{C}} = -3.$$

Partie A

1. Écrire les nombres complexes z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle.

2. Placer les points A, B et C.

3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'aflixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3}\text{i}z^2$.
On note O$'$, A$'$, B$'$ et C$'$ les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. **a.** Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A$'$, B$'$ et C$'$.

b. Placer les points A$'$, B$'$ et C$'$.

c. Démontrer l'alignement des points O, A et B$'$ ainsi que celui des points O, B et A$'$.

d. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G$'$ le point associé à G par f.
Déterminer les affixes des points G et G$'$.
Le point G$'$ est-il l'isobarycentre des points O$'$ A$'$, B$'$ et C$'$?

2. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$. (On ne demande pas de tracer cette parabole)

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 \mod 10000$.

Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,009^2$ par 16.
2. En déduire que $2\,009^{8\,001} \equiv 2009 \mod 16$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2\,009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1. **a.** Démontrer que u_0 est divisible par 5.

   b. Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n,

$$u_{n1} = u_n\left[u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right].$$

   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.

2. **a.** Vérifier que $u_3 = 2\,009^{250} - 1$ puis en déduire que $2\,009^{250} \equiv 1 \mod 625$.

   b. Démontrer alors que $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \mod 625$.

Partie C

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2\,009^{8\,001} - 2\,009$ est divisible par 10 000.
2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009.

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Exercice 2