

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2009

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 1 cm. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 3 + 4i$.

Soit C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3})$ et

$z_D = -2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3})$.

L'objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C.

1.
 - a. Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D.
 - b. En déduire que les points B et D sont sur un cercle \mathcal{C} de centre A dont on déterminera le rayon.
2. Soit F, l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.
 - a. Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2i$.
 - b. Montrer que le point F est le milieu du segment [CD].
 - c. Montrer que $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$.
Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment [CD].
3. Proposer un programme de construction pour les points D et C à partir des points A, B et F et réaliser la figure.
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 2

5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points :

$$A(4 ; 0 ; 0), \quad B(0 ; 2 ; 0), \quad C(0 ; 0 ; 3) \quad \text{et} \quad E\left(\frac{2}{3} ; -\frac{2}{3} ; \frac{1}{9}\right)$$

On se propose de déterminer de deux façons la distance δ_E du point E au plan (ABC).

RAPPEL : Soit (\mathcal{P}) un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des nombre réels avec, a, b et c non tous nuls et M un point de coordonnées $(x_M ; y_M ; z_M)$ la distance δ_M du point M au plan (\mathcal{P}) est égale à :

$$\frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

1.
 - a. Montrer que les points A, B et C déterminent bien un plan.
 - b. Soit \vec{n} le vecteur de coordonnées $(3 ; 6 ; 4)$.
Montrer que \vec{n} est un vecteur normal au plan (ABC).
 - c. Montrer qu'une équation du plan (ABC) est : $3x + 6y + 4z - 12 = 0$.
 - d. Déduire des questions précédentes la distance δ_E .
2.
 - a. Montrer que la droite (\mathcal{D}) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = \frac{5}{9} + \frac{4}{3}t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R},$$

est perpendiculaire au plan (ABC) et passe par le point E.

- b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal G du point E sur le plan (ABC).
- c. Retrouver à partir des coordonnées des points E et G la distance δ_E .

EXERCICE 3**5 points****Commun à tous les candidats**

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$.

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènement : « la n -ième cible est atteinte ».
- \bar{A}_n l'évènement : « la n -ième cible n'est pas atteinte ».
- a_n la probabilité de l'évènement A_n
- b_n la probabilité de l'évènement \bar{A}_n .

1. Donner a_1 et b_1 .

Calculer a_2 et b_2 . On pourra utiliser un arbre pondéré.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$,

puis : $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$

3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \frac{2}{3}$.

- a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique.
On précisera la raison et le premier terme U_1 .
- b. En déduire l'expression de U_n en fonction de n , puis l'expression de a_n en fonction de n .
- c. Déterminer la limite de la suite (a_n) .
- d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n \geq 0,6665$.

EXERCICE 4**6 points****Commun à tous les candidats**

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = (1+x)e^{-x}.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 1 cm.

1.
 - a. Étudier le signe de $f(x)$ sur \mathbb{R} .
 - b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} .
Calculer, pour tout nombre réel x , $f'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
 - d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2; 5]$.
2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_{-1}^n f(x) dx.$$

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n .

- a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \geq 0$.
- b.** Montrer que la suite (I_n) est croissante.
- 3. a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b :

$$\int_a^b f(x) dx = (-2 - b)e^{-b} + (2 + a)e^{-a}.$$

- b.** En déduire l'expression de I_n en fonction de n .
- c.** Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
- d.** Donner une interprétation graphique de cette limite.
- 4.** Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\int_{-1}^{\alpha} f(x) dx = e$.

Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?