SYNTHESE SUR LA NUMERATION

I- Les entiers naturels.

Les premiers nombres rencontrés dans la scolarité sont les nombres entiers positifs, appelés aussi nombres « naturels » car ce sont aussi les nombres qui ont été utilisés par les premiers hommes qui ont su compter. Ils paraissent être les plus simples et les plus évidents…

Ils servent à dénombrer des quantités dites discrètes, c'est-à-dire dans lesquelles on décèle des entités séparées et qu'on peut isoler en unités, à la différence des quantités continues qui sont des quantités pour lesquelles il est difficile a priori d'y déceler une unité première. C'est le cas d'un verre d'eau. Comment le quantifier ? C'est plus difficile que de quantifier un verre de billes…
Une quantité discrète s'appelle une ***collection***.

Pour dénombrer, il faut posséder une suite ordonnée de mots associés à des symboles. La suite numérique appelée aussi comptine est ainsi constituée de mots qu'on apprend à dire dans l'ordre dès son plus jeune âge : un, deux, trois… ou bien one, two, three… ou encore hoe, piti, toru, maha, pae…
Ces mots prononcés oralement sont appelés des mots-nombres.

La règle du dernier mot-nombre prononcé.

Pour dénombrer on récite la suite numérique et on associe le geste à la parole en synchronisant les deux. Si on s'arrête sur « cinq », il suffit de retenir ce dernier mot qui sous-entend tous les précédents. On dit alors qu'il y a cinq objets.
C'est ce qu'on doit apprendre en maternelle et certains enfants rejouent quelquefois ce dialogue : « M : combien il y en a ? E : il y en a un, deux, trois, quatre, cinq… M : Alors combien il y en a ? E : et bien, il y en a un deux trois quatre cinq… »

Cette suite numérique définit d'emblée deux aspects du nombre. Il est a la fois cardinal (il définit la cardinalité d'une collection) et ordinal (il repère la place d'un objet dans une suite).

Une opération est naturelle sur ces nombres, c'est celle qui permet de passer d'un nombre à son successeur. Pour cela il faut ajouter 1. Ainsi, on définit l'addition : ajouter 1 c'est dire le successeur d'un nombre, ajouter 2 c'est donner le successeur du successeur, ainsi de suite…

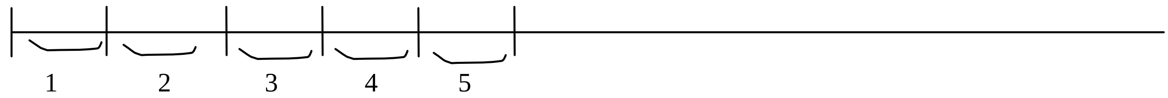
La représentation usuelle des nombres entiers est la frise. Un nombre par case. Elle est utilisée à l'école de la SP au CP. Souvent elle est affichée au dessus du tableau, et elle est utilisée dans les jeux de l'oie ou tous les jeux utilisant une piste.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**…**	

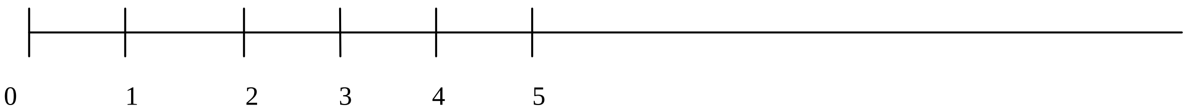
Un problème se pose ici, c'est le rôle du zéro… Faut-il le mettre dans la frise ou ne pas le mettre ? Est-ce un nombre comme les autres ? La question n'est pas si simple. Si on le rajoute au début de la liste, le premier nombre n'est plus 1 mais 0, et cela crée un décalage entre les ordinaux et les cardinaux…
De plus un nombre, pour des élèves de cet âge, sert à dénombrer une collection. S'il n'y a pas de collection a-t-on besoin de dénombrer ?
Souvent les enfants de maternelle utilise le zéro et savent que quand on a tout enlevé, qu'il n'y a plus rien, ça fait zéro. Ils en ont donc une connaissance implicite qui provient du retrait. Il y avait une collection, il n'y en a plus, mais la collection reste évoquée…
Le mieux est de ne pas le mettre dans la frise, il existe mais on n'en parle pas trop pour l'instant, il viendra plus tard.

De la frise à la droite.

Et justement, il va être nécessaire quand on va vouloir passer de la frise à la droite numérique. Cela se produit en fin de CP ou en début de CE1, car c'est lié à la mesure des longueurs.
Il faut pour cela quantifier une longueur de ficelle par exemple, qui est une grandeur continue et non plus discrète comme les collections d'objets isolés. On définit une unité qu'on reporte et cela crée une graduation :



Qui se transforme en :



Cette représentation est différente et un peu plus compliquée que la frise car le nombre sert à la fois à repérer un piquet, un point de la droite, et à compter des intervalles. Par exemple : la distance entre le piquet 3 et le piquet 7 est de 4 intervalles. Le nombre a donc deux usages différents sur la même représentation. Et le zéro doit absolument apparaître ici !

Ce passage à la droite numérique est capital car il permet de construire la règle et de comprendre son fonctionnement, notamment pourquoi quand on mesure, on place l'extrémité du segment sur le 0 et pas sur le 1, erreur courante des apprentis mesureurs, et aussi de comprendre facilement qu'il existe d'autres nombres que les entiers, car si je prend une longueur entre 2 et 3, sa mesure doit être un nombre, mais ce nombre n'est ni 2 ni 3. Il va falloir en créer de nouveaux, entre les entiers…

II – Les systèmes de numération.

Un système de numération est un système de représentation des nombres par l'écriture (ou oralement). Le notre utilise des chiffres qui répétés et placés dans un ordre convenable permettent de représenter toutes les quantités possibles jusqu'à l'infini et de toutes les distinguer entre elles. C'est un système extrêmement performant et sans lui nous ne serions pas allés sur la Lune ou nous n'aurions pas d'ordinateur , car il faut un système de numération performant pour pouvoir faire facilement des calculs.

Les systèmes utilisés par les anciens n'étaient pas tous aussi performants (essayez de faire une multiplication en chiffres romains…) et on les classe principalement en deux catégories :

Les systèmes additifs

- C'est le cas du système **égyptien**, qui est purement additif. Il repose sur les groupements par 10 et il existe un symbole pour chaque niveau de groupement ; 10, 100, 1000, etc… qu'on répète autant de fois que nécessaire pour obtenir la quantité désirée.
- Le système **romain** est une amélioration du système égyptien, avec l'introduction de la notation soustractive, ce qui implique que la position des symboles est importante dans l'écriture du nombre. Cette innovation a eu pour but de raccourcir l'écriture de certains nombres, comme 999 par exemple qui est passé de CCCCCCCCCXXXXXXXXXIIIIIIIII à CMXCIX.
- Le système **babylonien** repose sur le même principe que le système égyptien mais avec des groupements par 60.
- Le système **sino-japonais** est encore une amélioration puisque une notation multiplicative est introduite qui évite de répéter autant de fois le symbole que nécessaire. Pour noter 999 il suffit d'écrire 9 – 100 – 9 – 10 – 9 avec les idéogrammes correspondants.

Les systèmes de position

- C'est le cas du système **maya**, qui repose sur des groupements par 20. Il n'y a que trois symboles et la hauteur d'écriture du symbole lui fait changer de valeur. Le zéro est nécessaire ici pour écrire certains nombres, ce qui n'était pas le cas dans les systèmes de type additifs.
- Le système **décimal** est clairement un système de position où la valeur de chaque chiffre change en fonction de sa position dans le nombre. Tous les systèmes de ce type utilisant une base quelconque sont des systèmes de position.

Différence entre chiffre et nombre.

Un chiffre dans un système de numération est un symbole dont l'ensemble constitue « l'alphabet » du système. L'écriture des nombres nécessite l'emploi de ces chiffres. En base 10, les chiffres sont 0, 1, 2… jusqu'à 9. Au-delà on répète les chiffres nécessaires.

La différence est donc la même qu'entre des lettres et des mots, mais bien sûr un chiffre est aussi un nombre puisque 5 par exemple code la quantité « cinq »…

Les systèmes de position en base quelconque.

Pour créer un système de position il faut définir une taille de groupement. On a fixé 10 de façon arbitraire sûrement à cause de nos doigts, mais on aurait pu prendre 7 ou 15 ou tout autre chose…

Prenons par exemple 5 comme base.
On a besoin de cinq signes pour constituer notre alphabet, prenons n'importe quoi :

I	II	III	IIII	Absence, rien
☺	☻	☼	♪	♥

Puis une collection quelconque :

IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII

Première étape : on fait des groupements par 5 :

IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII III

On obtient 13 paquets de 5 et trois bâtons isolés,

Deuxième étape, on regroupe les paquets de 5 eux-mêmes par paquets de 5 :

IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII III

Le processus s'arrête quand on ne plus réitérer les groupements par 5, comme ici

Ceci mis en tableau et en utilisant les chiffres définis au-dessus, donne

Paquets de 5 fois 5	Paquets de 5	Bâtons isolés
☻	☼	☼

Et on décide de noter ça : ☻☼☼

Cette quantité serait avec nos chiffres 68, c'est-à-dire 6 paquets de 10 et 8 unités. Pour simplifier l'écriture abandonnons les symboles et reprenons les chiffres usuels. En base 5, 68 s'écrit $\underline{233}_5$.
On est obligé de souligner ou de surligner l'écriture pour ne pas confondre cette écriture avec le nombre 233, et de mettre un petit 5 pour bien préciser la nature des groupements. On lit « deux-trois-trois en base 5 ».

Ainsi on peut « inventer » autant de systèmes d'écriture que l'on veut, il suffit de savoir faire des groupements identiques.

Cas des systèmes dans des bases dépassant 10.

Si on veut faire des groupements de plus de 10 unités, il faut avoir un système de chiffres qui va au-delà de 10 et c'est là que se pose un problème car on ne peut plus utiliser nos nombre habituels… Exemple, en base 12, $\underline{10}$ signifie-t-il 1 x 12 + 0 ou bien 0 x12 + 10 ?

Pour y remédier, on est obligé d'utiliser d'autres chiffres pour les quantités au-delà de 9.
Exemple de la base 16, dite hexadécimale (hexa : 6 et déci : 10, à ne pas confondre avec le système sexagésimal, qui lui repose sur la base 60, comme c'est le cas pour mesurer le temps par exemple).

On besoin de 16 chiffres, on utilise les chiffres habituels qu'on complète avec des lettres :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***A***	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***

Ainsi dans ce système $\underline{BBB}$ signifie Bx16^2 + Bx16 + B, donc : 11x 16^2 + 11x16 + 11.
Cette base étant une amélioration de la base 2, elle est utilisée en informatique principalement.

III – Propriétés des nombres naturels.

1/ relation de multiples et de diviseurs.

Définition : un nombre a est un multiple d'un autre nombre b si il existe un nombre c tel que : a = b x c.
On dit aussi alors que b est un diviseur de a.

Les diviseurs d'un nombre vont toujours par deux, quand on en trouve un on en trouve automatiquement un autre. Pour les chercher il est commode de les noter ainsi :

Diviseurs de 24 :	1	2	3	4
	24	12	8	6

On les écrit en colonne deux par deux et on les écrit dans l'ordre croissant sur la première ligne, ainsi on n'en oublie pas.

Un nombre a toujours une infinité de multiples, les écrire dans l'ordre c'est construire la table de multiplication de ce nombre.

Par contre un nombre a toujours un nombre fini de diviseurs. Au minimum il n'en a que deux, 1 et lui-même. On dit alors qu'il est **premier**.
Les nombres premiers sont dans l'ordre : 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17 . 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43. 47. 53. 59…

PPCM
Parmi tous les multiples communs à deux nombres (il y en a une infinité), il en est un qui sera plus petit que tous les autres, c'est le PPCM.
Exemple PPCM(12 ; 30) = 60
Méthode pour trouver ce PPCM quand les nombres sont assez petits : on écrit les multiples du plus grand des deux et on s'arrête dès qu'on a écrit un multiple du plus petit.

PGCD
Parmi les diviseurs communs à deux nombres (et il y en a toujours au moins un, qui est 1), il y en a un qui est le plus grand de tous c'est le PDCD.
Exemple : PGCD (12 ; 30) = 6
Méthode pour le trouver quand les nombres sont assez petits : écrire tous les diviseurs du plus petit des deux nombres puis regarder lequel est le plus grand parmi ceux qui divisent aussi le grand nombre.
Si les nombres sont plus grands, on peut utiliser l'algorithme d'Euclide, basé sur les divisions euclidiennes, dont voici un exemple :

Soit à chercher le PGCD de 9309 et de 2675.

Divisions euclidiennes	**Quotient**	**reste**
On divise le plus grand par le plus petit : 9309 divisé par 2675	3	1284
On divise le plus petit nombre de la division précédente par le reste trouvé 2675 divisé par 1284	2	107
idem 1284 divisé par 107	12	0

On tombe toujours sur 0 à la fin, le PGCD est le dernier reste non nul, ici 107.

Si deux nombres n'ont aucun diviseur en commun autre que 1, on dit qu'il sont premiers entre eux. C'est le cas de 15 et 24, par exemple, sans qu'aucun deux ne soit premier séparément.

Règle générale : **PGCD(a, b) x PPCM(a, b) = a x b.**

Cette règle peut être utile car si on a trouvé le PCGD ou le PPCM on trouvera l'autre très vite.

2/ Critères de divisibilité.

Pour savoir si un nombre est divisible par un autre, d'ordinaire il faut faire la division et si il n'y pas de reste, c'est-à-dire si le résultat est entier (on dit abusivement que ça tombe juste…), alors les deux nombres sont en rapport de multiple/diviseur.
Pour certains cas, on possède des critères qui évitent de faire les divisions :

Divisibilité par 2, 5 ou 10 :
- Un nombre est divisible par 2 (pair) si il se termine par : 0, 2, 4, 6 ou 8
- Un nombre est divisible par 5 si il se termine par : 0 ou 5
- Un nombre est divisible par 10 si il se termine par : 0

Divisibilité par 3 ou 9 :
- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3
- Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9

Divisibilité par 4 ou 25 :
- Un nombre est divisible par 4 si les deux derniers chiffres forment un nombre divisible par 4
- Un nombre est divisible par 25 si les deux derniers chiffres forment un nombre divisible par 25

Divisibilité par 11 :
- Un nombre est divisible par 11 si la différence (en valeur absolue) entre la somme de ses chiffres de rangs pairs et la somme des chiffres de rangs impairs est un multiple de 11