

Exercice 1

4 points

Commun à tous les candidats.

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6 % sont défectueux.

Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite.

Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.

On note :

- D l'évènement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;
- R l'évènement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

1. Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2.
 - a. Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.
 - b. On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.
Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.
3. Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,894 2.
4. Quatre contrôles successifs indépendants sont maintenant réalisés pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé.

Un lecteur MP3 est :

- commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs,
- détruit s'il est rejeté au moins deux fois,
- commercialisé sans le logo sinon.

Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 s'élève à 50 €.

Son prix de vente est de 120 € pour un lecteur avec logo et 60 € pour un lecteur sans logo.

On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque lecteur MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

- a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G .
- b. Calculer à 10^{-2} près l'espérance mathématique de G . Donner une interprétation de ce résultat.

Exercice 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.

On supposera connus les résultats suivants :

- Pour tous points A, B et C du plan d'affixes respectives a , b et c , avec $A \neq C$ et $A \neq B$:
 $\left| \frac{b-a}{c-a} \right| = \frac{AB}{AC}$ et $\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif ;
- Soit z un nombre complexe et soit θ un nombre réel :
 $z = e^{i\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

Démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , unité graphique 1 cm.

Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = iz + 4 + 4i.$$

- Déterminer l'affixe ω du point Ω tel que $f(\Omega) = \Omega$
 - Montrer que, pour tout nombre complexe z on a : $z' - 4i = i(z - 4i)$.
 - En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .
- On note A et B les points d'affixes respectives $a = 4 - 2i$ et $b = -4 + 6i$.
 - Placer les points A, B et Ω sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.
 - Déterminer les affixes des points A' et B' images respectives des points A et B par f .
- On appelle m , n , p et q les affixes des points M, N, P et Q, milieux respectifs des segments $[AA']$, $[A'B]$, $[BB']$ et $[B'A]$.
 - Déterminer m . On admettra que $n = 1 + 7i$, $p = -3 + 3i$ et $q = 1 - i$.
 - Démontrer que MNPQ est un parallélogramme.
 - Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\frac{q-m}{n-m}$.
En déduire la nature du quadrilatère MNPQ.
- Démontrer que les droites $(B'A)$ et (ΩN) sont perpendiculaires.

Exercice 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.

On supposera connu le résultat suivant :

Une application f du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B' , alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B' .

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , unité graphique 2 cm.

On note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives

$$z_A = 2i, z_B = 2, z_C = 4 + 6i, z_D = -1 + i \text{ et } z_E = -3 + 3i.$$

1. Placer les points sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure des questions.
2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. Soit f la similitude plane directe telle que $f(A) = D$ et $f(B) = A$.
 - a. Donner l'écriture complexe de f .
 - b. Déterminer l'angle, le rapport et le centre Ω de cette similitude.
 - c. Montrer que le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude f .
 - d. En déduire la nature du triangle DAE.
4. On désigne par (Γ_1) le cercle de diamètre $[AB]$ et par (Γ_2) le cercle de diamètre $[AD]$.
On note M le second point d'intersection du cercle (Γ_1) et de la droite (BC) , et N le second point d'intersection du cercle (Γ_2) et de la droite (AE) .
 - a. Déterminer l'image de M par la similitude f .
 - b. En déduire la nature du triangle ΩMN .
 - c. Montrer que $MB \times NE = MC \times NA$.

Exercice 3

5 points

Commun à tous les candidats.

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points : $A(1 ; -1 ; 3)$, $B(0 ; 3 ; 1)$, $C(6 ; -7 ; -1)$, $D(2 ; 1 ; 3)$ et $E(4 ; -6 ; 2)$.

1.
 - a. Montrer que le barycentre du système $\{(A, 2), (B, -1), (C, 1)\}$ est le point E.
 - b. En déduire l'ensemble Γ des points M de l'espace tels que

$$\|2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 2\sqrt{21}.$$

2.
 - a. Montrer que les points A, B et D définissent un plan.
 - b. Montrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (ABD) .
 - c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABD) .
3.
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC) .
 - b. Déterminer les coordonnées du point F intersection de la droite (EC) et du plan (ABD) .
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation*
Montrer que le plan (ABD) et l'ensemble Γ , déterminé à la question 1., sont sécants. Préciser les éléments caractéristiques de cette intersection.

Exercice 4**6 points***Commun à tous les candidats.*

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

La courbe (\mathcal{C}) , donnée en annexe, est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[0; +\infty[$, de fonction dérivée f' continue sur $[0; +\infty[$.

La courbe (\mathcal{C}) passe par les points O et $A\left(1; \frac{1}{2e}\right)$ et, sur $[0; 1]$, elle est au dessus du segment $[OA]$.

1. Montrer que $\int_0^1 f'(x) dx = \frac{1}{2e}$.

2. Montrer que $\int_0^1 f(x) dx \geq \frac{1}{4e}$.

Partie B

On sait désormais que la fonction f considérée dans la partie A est définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{x^2 + 1}.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.
Établir que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; +\infty[$.
3.
 - a. Montrer que pour tout x de $[0; +\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.
 - b. En déduire les variations de f sur $[0; +\infty[$.
4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{2n} f(x) dx.$$

- a. Montrer que pour tout x de $[0; +\infty[$, $0 \leq \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$.
- b. Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n})$.
- c. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

ANNEXE

Exercice 4

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie

