Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2008 ∾

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ on considère les points :

A(3 ; −2 ; 1)	B(5 ; 2 ; −3)
C(6 ; −2 ; −2)	D(4 ; 3 ; 2)

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, puis que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\ ;\ 1\ ;\ 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. En déduire une équation du plan (ABC).

c. Montrer que la distance du point D au plan (ABC) est égale à 3.

3. Calculer le volume du tétraèdre ABCD en unités de volume.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 2+2\text{i}$, $z_{\text{B}} = 2\text{i}$ et $z_{\text{C}} = 2$ ainsi que le cercle Γ de centre A et de rayon 2.

La droite (OA) coupe le cercle Γ en deux points H et K tels que OH < OK. On note z_{H} et z_{K} les affixes respectives des points H et K,

a. Faire une figure en prenant 1 cm comme unité graphique.

b. Calculer la longueur OA. En déduire les longueurs OK et OH.

c. Justifier, à l'aide des notions de module et d'argument d'un nombre complexe, que

$$z_{\text{K}} = \left(2\sqrt{2}+2\right)\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} \qquad z_{\text{H}} = \left(2\sqrt{2}-2\right)\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}.$$

Dans toute la suite, on considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-4}{z}.$$

2. **a.** Déterminer et placer les points images de B et C par f.

b. On dit qu'un point est invariant par f s'il est confondu avec son image.
Déterminer les points invariants par f.

3. **a.** Montrer que pour tout point M distinct de O, on a :

$$\text{O}M \times \text{O}M' = 4.$$

b. Déterminer $\arg\left(z'\right)$ en fonction de $\arg(z)$.

4. Soient K′ et H′ les images respectives de K et H par f.

a. Calculer OK′ et OH′.

b. Démontrer que $z_{\text{K}'} = \left(2\sqrt{2}-2\right)\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{\text{H}'} = \left(2\sqrt{2}+2\right)\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$.

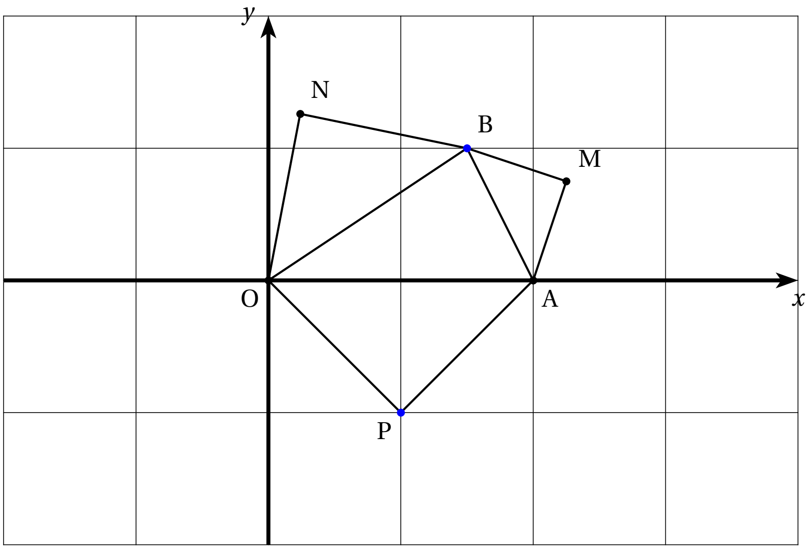
c. Expliquer comment construire les points K′ et H′ en utilisant uniquement la règle et le compas à partir des points K et H. Réaliser la construction.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\text{OI}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OJ}}\right)$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 2$ et $z_{\text{B}} = \dfrac{3}{2} + \text{i}$.

On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous.



On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N. On considère la transformation $r = s_2 \circ s_1$.

Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1. À l'aide des transformations

a. Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2.

b. Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r.

c. Justifier que r est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.

d. Quelle est l'image du point O par r ?

e. En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2. En utilisant les nombres complexes

a. Donner les écritures complexes de s_1 et s_2. On utilisera les résultats de la question 1. a.

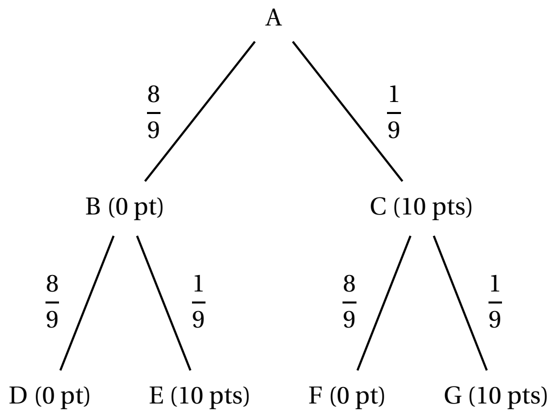
b. En déduire les affixes z_{M} et z_{N} des points M et N.

c. Donner, sans justification, l'affixe z_{P} du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Un joueur lance une bille qui part de A puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F et G.



On a marqué sur chaque branche de l'arbre la probabilité pour que la bille l'emprunte après être passé par un nœud.

Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille. On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.

1. Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme fractionnaire.
   - **a.** Déterminer la loi de probabilité de X.
   - **b.** Calculer l'espérance de X.
   - **c.** Calculer la probabilité que la bille ait suivi la branche AC sachant que le joueur a obtenu exactement 10 points.
2. Le joueur effectue 8 parties et on suppose que ces huit parties sont indépendantes. On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.
   - **a.** Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties. On donnera le résultat arrondi au millième
   - **b.** Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \ln x - 2 + x.$$

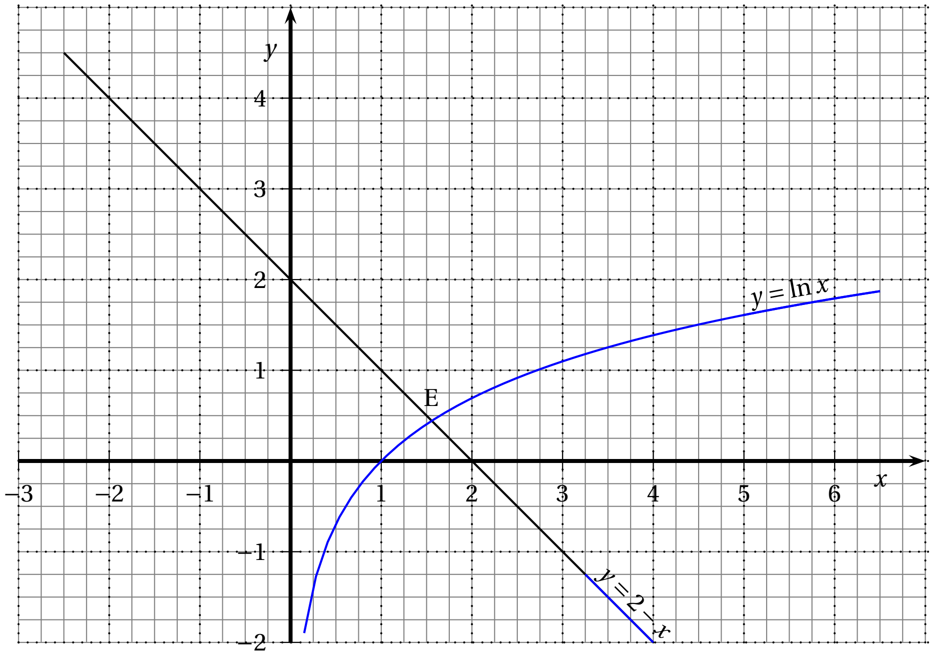
1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   Donner un encadrement du nombre α à 10^{-2} près.

PARTIE B

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On considère sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction ln, ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2 - x$. On note E le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.



On considère l'aire en unités d'aire, notée $\mathscr{A}$, de la partie du plan située au dessus de l'axe des abscisses et au dessous de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

1. Déterminer les coordonnées du point E.
2. Soit $I = \displaystyle\int_1^{\alpha} \ln x \, \text{d}x$.
   a. Donner une interprétation géométrique de I.
   b. Calculer I, en fonction de α, à l'aide d'une intégration par parties.
   c. Montrer que I peut aussi s'écrire $I = -\alpha^2 + \alpha + 1$ sachant que $f(\alpha) = 0$.
3. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en fonction de α.

EXERCICE 5 **3 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\text{e}^x - 1}.$$

1. **Restitution organisée de connaissances :**

   La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{lcl} g'(x) & = & g(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \\ g(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

   Démontrer que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\text{e}^h - 1}{h} = 1$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

PARTIE B

Soit (u_n) la suite définie pour n entier supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = \frac{1}{n}\left[1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \cdots + \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

1. Démontrer que $1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \cdots + \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}} = \dfrac{1-\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$ puis en déduire que $u_n = (\mathrm{e}-1)f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2. En déduire, en utilisant aussi la **PARTIE A**, que la suite (u_n) converge vers $\mathrm{e}-1$.