**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat S Métropole & La Réunion ∾ septembre 2008

**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Soient E et F les évènements :
   E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges »
   F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».
   Montrer que $p(\text{E}) = 0,02$ et $p(\text{F}) = 0,17$.
3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.
   $X$ désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel le joueur mise 1 €).
   a. Déterminer la loi de probabilité de $X$.
   b. Calculer l'espérance mathématique de $X$ et en donner une interprétation.
4. Le joueur décide de jouer $n$ parties consécutives et indépendantes ($n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)
   a. Démontrer que la probabilité $p_n$ qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que $p_n = 1 - (0,9)^n$.
   b. Justifier que la suite de terme général $p_n$ est convergente et préciser sa limite.
   c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier $n$ pour laquelle $p_n > 0,9$ ?

**EXERCICE 2** **3 points**

**Commun à tous les candidats**

On se propose de déterminer toutes les fonctions $f$ définies et dérivables sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle

$$(E)\ :\qquad xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2.$$

1. a. Démontrer que si $f$ est solution de $(E)$ alors la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E')\ :\quad y' = 2y + 8$.
   b. Démontrer que si $h$ est solution de $(E')$ alors la fonction $f$ définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de $(E)$.
2. Résoudre $(E')$ et en déduire toutes les solutions de $(E)$,

3. Existe-t-il une fonction $f$ solution de l'équation différentielle $(E)$ dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point A$(\ln 2\ ;\ 0)$ ? Si oui la préciser.

**EXERCICE 3** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

**Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).**

*Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.*

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct $\left(\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\right)$. On note I son centre et J le milieu de [AI].

1. C est le barycentre des points pondérés (A, $m$), (B, 1) et (D, 1) lorsque :
   **a.** $m = -2$ **b.** $m = 2$ **c.** $m = -1$ **d.** $m = 3$
2. **a.** B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   **b.** Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\dfrac{2}{3}$.
   **c.** Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.
   **d.** J est l'image de I par la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{BA}} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{DB}}$.
3. L'ensemble des points $M$ du plan tels que $\| \overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{C}} \| = \text{AB}$ est :
   **a.** la médiatrice de [AC].
   **b.** le cercle circonscrit au carré ABCD.
   **c.** la médiatrice de [AI].
   **d.** le cercle inscrit dans le carré ABCD.
4. L'ensemble des points $M$ du plan tels que :
$$\left(2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{D}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{C}}\right) = 0$$
   est :
   **a.** la médiatrice de [AC].
   **b.** le cercle circonscrit au carré ABCD.
   **c.** la médiatrice de [AI].
   **d.** le cercle inscrit dans le carré ABCD.

**EXERCICE 4** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

On considère la suite numérique $(J_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$ non nul, par
$$J_n = \int_1^n \text{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\text{d}t.$$

1. Démontrer que la suite $(J_n)$ est croissante.
2. *Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*
   On définit la suite $(I_n)$, pour tout entier naturel $n$ non nul, par :
$$I_n = \int_1^n (t+1)\text{e}^{-t}\,\text{d}t.$$

**a.** Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.

**b.** En déduire que $J_n \leqslant I_n$.

**c.** Calculer $I_n$ en fonction de $n$. En déduire que la suite $(J_n)$ est majorée par un nombre réel (indépendant de $n$).

**d.** Que peut-on en conclure pour la suite $(J_n)$ ?

**EXERCICE 5** **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On réalisera une figure en prenant 2 cm comme unité graphique sur chaque axe.
On considère les points A, B et I d'affixes respectives $z_\text{A} = 1$, $z_\text{B} = 5$ et $z_\text{I} = 3 + \text{i}$.
On note $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1, $(\Delta)$ la médiatrice de [AB] et (T) la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en A.
À tout point $M$ d'affixe $z$, différent de A, on associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que :

$$z' = \frac{z-5}{z-1}.$$

Le point $M'$ est appelé l'image de $M$.

**Partie A**

**1.** Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point I′ image de I.
Vérifier que I′ appartient à $(\mathscr{C})$.

**2.** **a.** Justifier que pour tout point $M$ distinct de A et B, on a : $\text{O}M' = \dfrac{M\text{B}}{M\text{A}}$.

**b.** Justifier que pour tout point $M$ distinct de A et B, on a :
$\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{M\text{A}}, \overrightarrow{M\text{B}}\right)$.

**Partie B**

*Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Dans la suite de l'exercice, $M$ désigne un point quelconque de $(\Delta)$. On cherche à construire géométriquement son image $M'$.

**1.** Démontrer que $M'$ appartient à $(\mathscr{C})$.

**2.** On note $(d)$ la droite symétrique de la droite $(\text{A}M)$ par rapport à la tangente (T). $(d)$ recoupe $(\mathscr{C})$ en $N$.

**a.** Justifier que les triangles A$M$B et AO$N$ sont isocèles.
Après avoir justifié que $\left(\overrightarrow{\text{AO}}, \overrightarrow{\text{A}N}\right) = \left(\overrightarrow{\text{A}M}, \overrightarrow{\text{AB}}\right)$ démontrer que
$\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{O}N}\right) = \left(\overrightarrow{M\text{A}}, \overrightarrow{M\text{B}}\right)$.

**b.** En déduire une construction de $M'$.

**EXERCICE 5** **5 points**

**Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On réalisera une figure en prenant 4 cm comme unité graphique sur chaque axe.
On considère le point A d'affixe $z_\text{A} = 1$.

**Partie A**

$k$ est un réel strictement positif ; $f$ est la similitude directe de centre O de rapport $k$

et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On note $A_0 = A$ et pour tout entier naturel $n$, $A_{n+1} = f\left(A_n\right)$.

1. **a.** Étant donné un point $M$ d'affixe $z$, déterminer en fonction de $z$ l'affixe $z'$ du point $M'$ image de $M$ par $f$.

   **b.** Construire les points $A_0$, $A_1$, $A_2$ et $A_3$ dans le cas particulier où $k$ est égal à $\frac{1}{2}$.

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier $n$, l'affixe $z_n$ du point $A_n$ est égale à $k^n \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi}{3}}$.

   **b.** En déduire les valeurs de $n$ pour lesquelles le point $A_n$ appartient à la demi droite $\left[\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{u}\right)$ et, dans ce cas, déterminer en fonction de $k$ et de $n$ l'abscisse de $A_n$.

**Partie B**

*Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Désormais, $k$ désigne un entier naturel non nul.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.
2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel $k$ pour laquelle $k^6$ est un multiple de 2008.
3. Pour quelles valeurs des entiers $n$ et $k$ le point $A_n$ appartient-il à la demi droite $\left[\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{u}\right)$ avec pour abscisse un nombre entier multiple de 2008 ?