Baccalauréat S Liban juin 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires.
Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires.
Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois :
s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A,
sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'évènement « le joueur obtient une boule rouge ».
Montrer que $p(\text{R}) = 0,15$.
2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).
Soit x un entier naturel non nul.
Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.
On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs $2x, x-2$ et -4.

1. Déterminer la loi de probabilité de G.
2. Exprimer l'espérance E(G) de la variable aléatoire G en fonction de x.
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\text{E(G)} \geqslant 0$?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Partie A

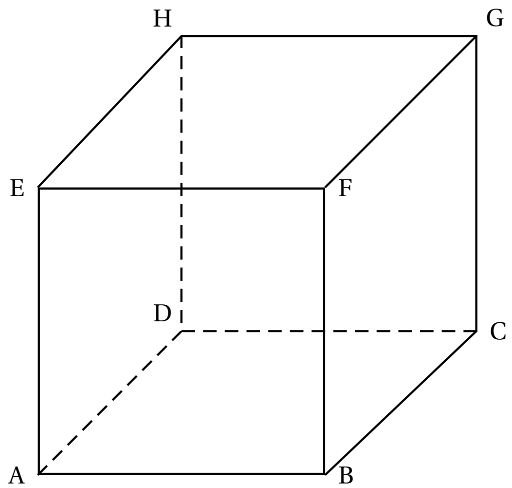
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Soit z un nombre complexe d'argument $\dfrac{\pi}{3}$.
Proposition 1 : « z^{100} est un nombre réel ».
2. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z différente de 1 du plan telle que $\left|\dfrac{z}{1-z}\right| = 1$.
Proposition 2 : « l'ensemble (E) est une droite parallèle à l'axe des réels ».
3. Soit r la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et dont le centre K a pour affixe $1+\text{i}\sqrt{3}$.
Proposition 3 : « l'image du point O par la rotation r a pour affixe $\left(1-\sqrt{3}\right)+\text{i}\left(1+\sqrt{3}\right)$ ».

4. On considère l'équation (E) suivante : $z^2 + 2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)z + 1 = 0$.
Proposition 4 : « l'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1 ».

Partie B

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1, représenté ci-dessous. **Proposition 5** : « le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE) ».
Proposition 6 : « les droites (EB) et (ED) sont perpendiculaires ».



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi la spécialité mathématiques

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère la similitude directe f d'écriture complexe

$$z \mapsto \frac{3}{2}(1-\mathrm{i})z + 4 - 2\mathrm{i}.$$

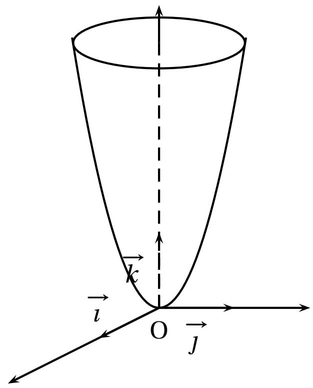
Proposition 1 : « $f = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport $3\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2-2\mathrm{i}$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ ».

2. Pour tout entier naturel n non nul :
Proposition 2 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5 ».
Proposition 3 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7 ».

3. Dans le plan muni d'un repère, (D) est la droite d'équation $11x - 5y = 14$.
Proposition 4 : « les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées $(5k + 14 ; 11k + 28)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

4. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

La surface Σ ci-contre a pour équation
$z = x^2 + y^2$.



Proposition 5 : « la section de la surface Σ et du plan d'équation $x = \lambda$, où λ est un réel, est une hyperbole ».

Proposition 6 : « le plan d'équation $z = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$ partage le solide délimité par Σ et le plan d'équation $z = 9$ en deux solides de même volume ».

Rappel : Soit V le volume du solide délimité par Σ et les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ où $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 9$.
V est donné par la formule $V = \int_a^b S(k)\,\text{dk}$ où $S(k)$ est l'aire de la section du solide par le plan d'équation $z = k$ où $k \in [a,\ b]$.

EXERCICE 3 — 6 points

Partie A. Démonstration de cours
Prérequis : définition d'une suite tendant vers plus l'infini.
« *une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A* ».
Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Partie B
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2.$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous. Cette courbe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer la droite (T) sur le graphique. Dans la suite de l'exercice, on admet que, sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, la courbe $(\mathscr{C})$ est située au dessus de la droite (T).

Partie C
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents les traits de construction (utiliser le graphique donné).
2. À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement lorsque n tend vers $+\infty$?

3.

a. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel $n, u_n \geqslant 1$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c. Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

d. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 — 5 points

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$.
On donne le tableau de ses variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	1

Soit g la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie A

1. En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe $(\mathscr{C})$ susceptible de représenter f dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).
2. **a.** Interpréter graphiquement $g(2)$.

   b. Montrer que $0 \leqslant g(2) \leqslant 2,5$.
3. **a.** Soit x un réel supérieur à 2.

   Montrer que $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant x-2$. En déduire que $g(x) \geqslant x-2$.

   b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$.

Partie B

On admet que pour tout réel $t, f(t) = (t-1)\mathrm{e}^{-t}+1$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer en fonction du réel x l'intégrale $\displaystyle\int_0^x (t-1)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire que pour tout réel x, $g(x) = x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$.
3. Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

EXERCICE 3

Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableur