Correction de la fiche Numération (4)

EXERCICE 1 : critère de divisibilité par 11 (exercice 3 du groupe 4, 2006)

1. $1\ 001 = 11\times91 + 0$.

2. Soit $\underline{mcdu}$ un nombre de 4 chiffres écrit en base dix.

On sait que $\underline{mcdu} = 1\ 000 \times m + 100 \times c + 10 \times d + u$, donc

$\underline{mcdu} = 1\ 001 \times m - m + 99 \times c + c + 11 \times d - d + u$, d'où le résultat.

3. a. On a donc $\underline{mcdu} = 11\times91 \times m + 9\times11 \times c + 11 \times d - m + c - d + u$,

d'où , $\underline{mcdu} = 11\times(91m + 9c + d) - m + c - d + u$. Comme $11\times(91m + 9c + d)$ est un multiple de 11, on en déduit que $\underline{mcdu}$ est divisible par 11 si et seulement si $- m + c - d + u$ est divisible par 11.

b. Pour ces nombres, on a $m = 3$ et $c = 8$. On peut proposer par exemple :

$3\ 850$ est divisible par 11 (car $-3 + 8 - 5 + 0 = 0$ est un multiple de 11).

$3\ 894$ est divisible par 11 (car $-3 + 8 - 9 + 4 = 0$ est un multiple de 11).

$3\ 817$ est divisible par 11 (car $-3 + 8 - 1 + 7 = 11$ est un multiple de 11).

EXERCICE 2 :

On sait que $36\ 202\ 744 = 9\ 658 \times 3\ 748 + 4\ 560$, avec $4560 < 9658$, donc le quotient de la division euclidienne de $a = 36\ 202\ 744$ par $b = 9\ 658$ est $q = 3748$, avec $r = 4560$.

Par contre, $4560 > 3748$, donc 4560 n'est pas le reste de la division euclidienne de $36\ 202\ 744$ par 3748. En remarquant que $4560 = 3748 + 812$, on a l'égalité $36\ 202\ 744 = 3\ 748\times9\ 659 + 812$, avec $812 < 3748$. On en déduit que le quotient de la division euclidienne de $a = 36\ 202\ 744$ par $b' = 3\ 748$ est $q' = 9659$, avec $r' = 812$.

EXERCICE 3 :

Choisir plusieurs nombres impairs et diviser leur carré par 8. Quel est le reste ? Comment l'expliquer ?

On peut commencer par quelques exemples :

nombre impair	1	3	5	7	9	11
carré	1	9	25	49	81	121
division par 8	$8\times0 + 1$	$8\times1 + 1$	$8\times3 + 1$	$8\times6 + 1$	$8\times10 + 1$	$8\times15 + 1$
reste	1	1	1	1	1	1

On peut émettre la conjecture suivante : le reste de la division euclidienne du carré d'un nombre impair par 8 est égal à 1.
Démonstration (**cas général** : les **exemples** ci-dessus **ne suffisent pas**).
Soit n un nombre impair : on sait alors que $n = 2m + 1$, avec m entier. On veut montrer que $n^2 = 8q + 1$, avec q entier.
Or $n^2 = (2m + 1)^2$. Or $(2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$ (identité remarquable du collège), donc $n^2 = 4(m^2 + m) + 1$.
Il reste à montrer que $m^2 + m$ est un multiple de 2. On peut raisonner par disjonction de cas :

- si m est pair, m^2 est pair, donc $m^2 + m$ est pair.
- si m est impair, m^2 est impair, donc $m^2 + m$ est pair.

Dans tous les cas, $m^2 + m$ est pair, donc $m^2 + m = 2q$, avec q entier.
On en déduit que $n^2 = 4(2q) + 1$, d'où $n^2 = 8q + 1$, avec q entier. Le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 est égal à 1.

EXERCICE 4 (adapté de Besançon 2004) :

1. Appelons n le nombre de jetons, c le nombre de jetons sur le côté du premier carré. Les données du problème se traduisent par les deux équations $n = c^2 + 52$ et $n = (c + 4)^2 - 60$. On en déduit que :

$c^2 + 52 = (c + 4)^2 - 60$, équation à une seule inconne, qui, en développant, donne $c^2 + 52 = c^2 + 8c + 16 - 60$, d'où $96 = 8c$, ce qui donne $c = 12$. On en déduit que le nombre de jetons est $n = 12^2 + 52$, d'où $n = 196$.

2. $196 = 14^2$, donc il peut disposer ses jetons en un carré de côté 14 jetons.

Questions complémentaires

Un enseignant propose à ses élèves l'énoncé suivant :

> *François possède un certain nombre de jetons. Il veut les disposer en carrés (disposition en quadrillage de n lignes et n colonnes).*
> *Il fait un essai en faisant un premier carré, il lui reste 11 jetons.*
> *S'il rajoute 2 jetons par colonnes et par lignes, il lui en manque 13.*
> *Combien a-t-il de jetons ?*
> *Son problème a-t-il une solution ?*

1. On peut proposer cet exercice au cycle 3 :

- Les élèves doivent associer à un quadrillage de n lignes et n colonnes le nombre de nœuds du quadrillage, c'est-à-dire $n \times n$. C'est en relation avec la notion de mesure de l'aire du carré, dont la formule est vue en CM2.
- Par ailleurs, les calculs effectués mettent en jeu à la fois la multiplication, l'addition et la soustraction, ce qui relève du cycle 3.

2. En cycle 3, il paraît difficile de classer ce problème dans la catégorie 1 : la notion mathématique sous-jacente est la mesure de l'aire du carré, mais ce problème a une formulation compliquée et demande sans doute trop de recherches annexes pour constituer un exercice d'introduction de cette notion.

En collège, on pourrait le classer dans la catégorie 2 : réinvestissement de la notion d'aire du carré et/ou résolution d'équation ; ce n'est pas envisageable en cycle 3.

Il paraît donc pertinent de classer ce problème dans la catégorie 3 en cycle 3 : les élèves doivent s'approprier le texte, ils n'ont pas de méthode experte associée et les stratégies de recherche sont très variées (voir ci-dessous)

3. En CE2, on pourrait regrouper les élèves par groupe et mettre à la disposition de chaque groupe une soixantaine de jetons (nombre raisonnable pour faire des essais par encadrement et trouver la solution) : les élèves sont alors amenés à manipuler les jetons de manière à traduire l'énoncé. Une procédure par essais/erreur et encadrement de l'erreur doit permettre d'arriver au résultat (le nombre de jetons du côté du carré étant peu élevé : 5 pour le premier carré, 7 pour le second, 6 pour le carré final). L'objectif recherché serait ici de comprendre un énoncé complexe pour le traduire en une manipulation adaptée au problème posé. Le maître pourrait à la fin mutualiser les résultats, afin de faire apparaître qu'une suite d'opérations peut éviter de faire un comptage jeton par jeton (passage de l'ordinal au cardinal).

Un autre mode de fonctionnement serait de demander aux élèves de traduire l'énoncé en utilisant les points du quadrillage de la feuille : les procédures et objectifs recherchés seraient analogues à la description faite précédemment, mais le degré d'abstraction serait plus grand. On pourrait proposer cet exercice en CM1.

Une dernière façon de faire serait de donner une calculatrice par élève, afin de les engager à travailler sur la signification des opérations à effectuer pour traduire mathématiquement un problème complexe : le degré d'abstraction est ici beaucoup plus grand, la notion de mesure de l'aire du carré étant alors mise en avant implicitement pour résoudre le problème. On pourrait proposer ce mode de fonctionnement en CM2, en l'associant éventuellement au quadrillage pointé décrit précédemment.