Durée : 4 heures

Baccalauréat S Polynésie (spécialité) septembre 2007

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

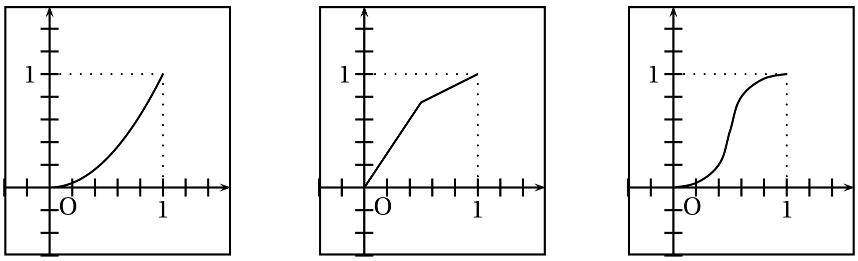
On désigne par (E) l'ensemble des fonctions f continues sur l'intervalle $[0~;~1]$ et vérifiant les conditions (P_1), (P_2) et (P_3) suivantes :

- (P_1) : f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.
- (P_2) : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
- (P_3) : pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) \leqslant x$.

Dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ du plan, on note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative d'une fonction f de l'ensemble (E) et (D) la droite d'équation $y = x$.

À toute fonction f de (E), on associe le nombre réel $I_f = \displaystyle\int_0^1 [x - f(x)]\,\text{d}x$.

1. **a.** Une seule des trois courbes ci-dessous représente une fonction de (E). La déterminer en justifiant l'élimination des deux autres.



Courbe n° 1 Courbe n° 2 Courbe n° 3

b. Montrer que, pour toute fonction f de (E), $I_f \geqslant 0$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $h(x) = 2^x - 1$. (On rappelle que, pour tout x réel, $2^x = \text{e}^{x\ln 2}$).

a. Montrer que la fonction h vérifie les conditions (P_1) et (P_2).

b. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $\varphi(x) = 2^x - x - 1$.
Montrer que, pour tout x de $[0\,;\,1]$, $\varphi(x) \leqslant 0$. (On pourra étudier le sens de variation de la fonction φ sur $[0\,;\,1]$).
En déduire que la fonction h appartient à l'ensemble (E).

c. Montrer que le réel I_h associé à la fonction h est égal à $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\ln 2}$.

3. Soit P une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels tels que $0 < a < 1$. On se propose de déterminer les valeurs des réels a, b et c pour que la fonction P appartienne à l'ensemble (E) et que $I_p = I_h$.

a. Montrer que la fonction P vérifie la propriété (P_2) si et seulement si, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $P(x) = ax^2 + (1 - a)x$.
Montrer que toute fonction P définie sur $[0\,;\,1]$ par $P(x) = ax^2 + (1 - a)x$ avec $0 < a < 1$ appartient à (E).

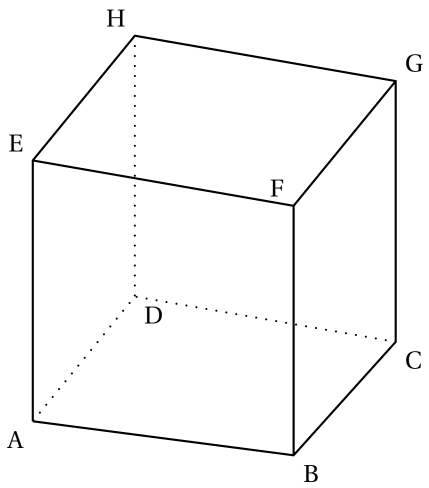
b. Exprimer en fonction de a le réel I_P associé à la fonction P.

c. Montrer qu'il existe une valeur du réel a pour laquelle $I_P = I_h$. Quelle est cette valeur ?

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 3.



On choisit le repère orthonormal $\left(\text{D}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ tel que $\vec{\imath} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{DA}}$, $\vec{\jmath} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{DC}}$ et $\vec{k} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{DH}}$.

1. **a.** Donner les coordonnées des points A, C et E.

   b. Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système $\{(\text{C}\,;\,2),\ (\text{E}\,;\,1)\}$.

   c. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AE}}$ et $\overrightarrow{\text{DL}}$.

2. Soit $(a,\ b)$ un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que $\overrightarrow{\text{A}M} = a\overrightarrow{\text{AE}}$ et N le point de la droite (DL) tel que $\overrightarrow{\text{D}N} = b\overrightarrow{\text{DL}}$.

   a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\text{AE}}$ et $\overrightarrow{\text{DL}}$ si et seulement si le couple $(a,\ b)$ vérifie le système $\left\{\begin{array}{rcl} -a+2b & = & 1 \\ 3a-b & = & 0 \end{array}\right.$

   b. En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

   c. Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes :

40 % sont de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.

On admet qu'au début de chaque année :

- chaque plante de type A disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type B disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type C disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est $0,6$ et celle qu'elle le soit par une plante de type B est $0,3$.

La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est $0,6$ et celle qu'elle le soit par une plante de type A est $0,3$.

Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- A_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type A »,
- B_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type B »,
- C_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type C ».

On désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n et C_n.

Compte tenu de la composition initiale de la végétation (début de l'année $n°0$) on pose : $p_0 = 0,40$, $q_0 = 0,41$ et $r_0 = 0,19$.

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.

2. **a.** Montrer que $p_1 = 0,363$ puis calculer q_1 et r_1.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

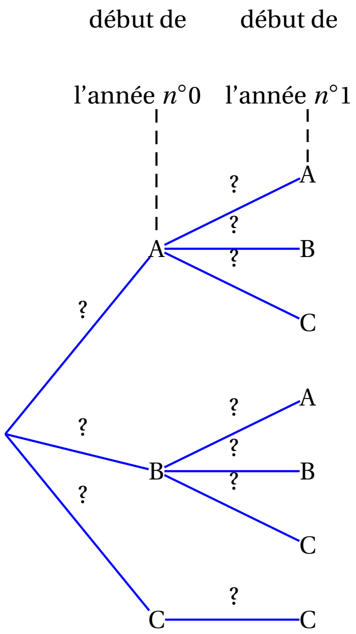
$$\left\{\begin{array}{lcl} p_{n+1} & = & 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} & = & 0,3p_n + 0,6q_n \end{array}\right.$$

3. On définit les suites (S_n) et (D_n) sur $\mathbb{N}$ par $S_n = q_n + p_n$ et $D_n = q_n - p_n$.

a. Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. On admet que (D_n) est une suite géométrique de raison 0,3.

b. Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n).

c. En déduire les limites des suites (p_n), (q_n) et (r_n).
Interpréter le résultat.



EXERCICE 4 **5 points**

Épreuve de spécialité

Pour cet exercice, les figures correspondant aux parties A et B sont fournies sur la feuille jointe en annexe. Cette feuille ne sera pas remise avec la copie.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère un triangle OAB et une similitude directe σ de centre O, de rapport λ et d'angle θ. Soit :

- les points A′ et B′, images respectives des points A et B par la similitude σ ;
- les points I, milieu du segment [A′ B] et J, milieu du segment [A B′] ;
- le point M milieu du segment [AA′] ;
- Je point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AR) et le point H′ image du point H par la similitude σ.

Partie A. Étude d'un exemple

Dans cette partie, le point A a pour affixe $-6+4\mathrm{i}$, le point B a pour affixe $2+4\mathrm{i}$, et le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), a donc pour affixe $4\mathrm{i}$.

La similitude σ est la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer les affixes des points A′, B′ et H′.

2. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH′).

Partie B. Étude du cas général

1. **a.** Montrer que H′ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (A′ B′).

   b. Montrer que $\overrightarrow{\text{MI}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AB}}$. On admet que $\overrightarrow{\text{MJ}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{A}'\text{B}'}$.

   c. En déduire que $\dfrac{\text{MJ}}{\text{MI}} = \dfrac{\text{OH}'}{\text{OH}}$ et que $\left(\overrightarrow{\text{MI}}, \overrightarrow{\text{MJ}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{OH}}, \overrightarrow{\text{OH}'}\right) + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. On appelle s la similitude directe qui transforme M en O et I en H.
   On note K l'image du point J par la similitude s.

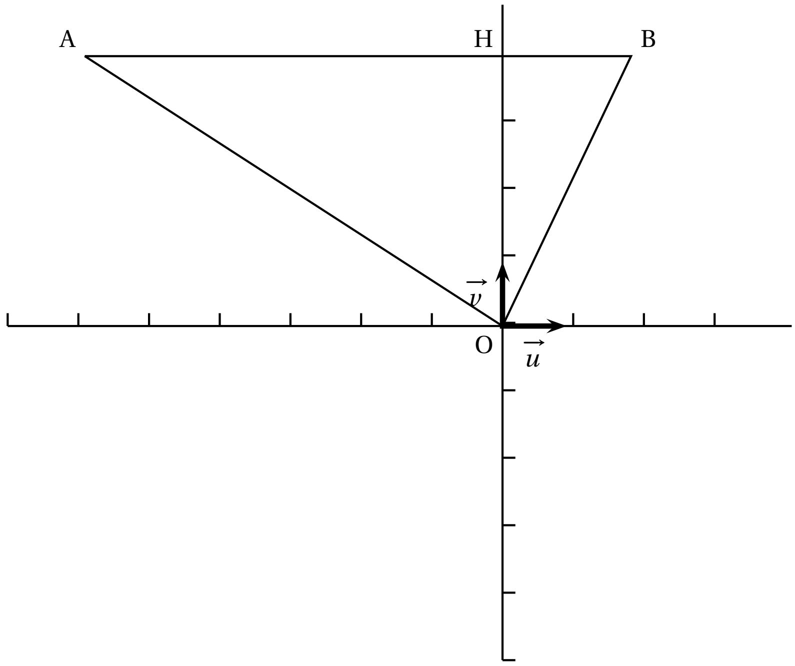
   a. Montrer que OK= OH′, puis que $\left(\overrightarrow{\text{MI}}, \overrightarrow{\text{MJ}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{OK}}, \overrightarrow{\text{OH}'}\right) + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

   b. En déduire que le point H′ est l'image du point J par la similitude s.

3. Montrer que $\left(\overrightarrow{\text{IJ}}, \overrightarrow{\text{HH}'}\right) = \left(\overrightarrow{\text{MI}}, \overrightarrow{\text{OH}}\right) + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
   Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH′).

ANNEXE

Cette page ne sera pas remise avec la copie
Partie A



Partie B