Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2007

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une urne contient 15 boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche, ou rouge.
On sait de plus qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne.
On tire au hasard simultanément 2 boules dans l'urne et on note leur couleur.
Soit l'évènement G : « obtenir deux boules de même couleur ».

Partie A

On suppose que l'urne contient 3 boules noires et 7 boules banches.
Calculer la probabilité de l'évènement G.

Partie B

On note $n,\ b$ et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.

1. On note $g(n,\ b,\ r)$ la probabilité en fonction de $n,\ b$ et r de l'évènement G.

   Démontrer que $g(n,\ b,\ r) = \dfrac{1}{210}[n(n-1)+b(b-1)+r(r-1)]$.

2. Le but de cette question est de déterminer $n,\ b$ et r afin que la probabilité $g(n,\ b,\ r)$ soit minimale.

   L'espace est muni d'un repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ orthonormal.

   Soient les points N, B et R de coordonnées respectives $(15\,;\,0\,;\,0)$, $(0\,;\,15\,;\,0)$ et $(0\,;\,0\,;\,15)$ et soit M le point de coordonnées $(n,\ b,\ r)$. On pourra se rapporter à la figure ci-dessous.

   a. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (NBR) est $x+y+z-15=0$.

   b. En déduire que le point M est un point du plan (NBR).

   c. Démontrer que $g(n,\ b,\ r) = \dfrac{1}{210}\left(\text{O}M^2-15\right)$.

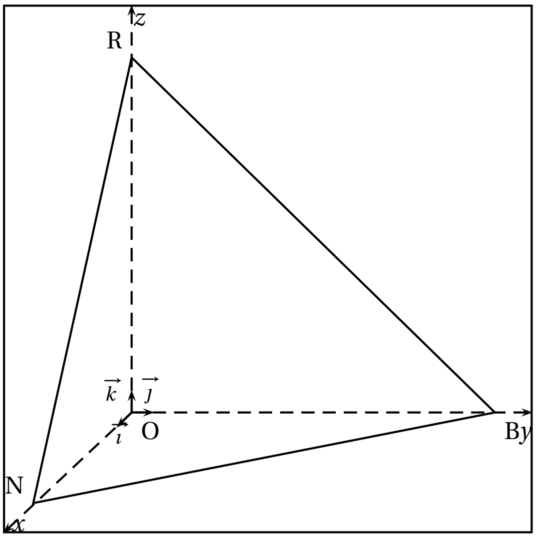
   d. Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR). Déterminer les coordonnées du point H.

   e. En déduire tes valeurs de $n,\ b$ et r afin que la probabilité $g(n,\ b,\ r)$ soit minimale. Justifier que cette probabilité minimale est égale à $\dfrac{2}{7}$.

Partie C

On suppose que les nombres de boules de chaque couleur ont été choisis par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'évènement G soit $\dfrac{2}{7}$.
Un joueur mise x euros, avec x entier naturel non nul, puis tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. Dans tous les cas, il perd sa mise de départ.
S'il obtient deux boules de la même couleur, il reçoit k fois le montant de sa mise, avec k nombre décimal strictement supérieur à 1. Sinon, il ne reçoit rien.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Calculer l'espérance $\text{E}(X)$ de la variable X en fonction de x et de k.
2. Déterminer la valeur de k pour laquelle le jeu est équitable.



EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Déterminer le nombre complexe α tel que $\begin{cases} \alpha(1+\text{i}) & = & 1+3\text{i} \\ \text{i}\alpha^2 & = & -4+3\text{i} \end{cases}$
2. Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = z^2 - (1+3\text{i})z + (-4+3\text{i})$.
   Montrer que $f(z)$ s'écrit sous la forme $(z-\alpha)(z-\text{i}\alpha)$.
   En déduire les solutions sous forme algébrique de l'équation $f(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 5 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2+\text{i}$ et $b = -1+2\text{i}$.
   Placer A et B dans le repère et compléter la figure au fur et à mesure.
   Montrer que $b = \text{i}\alpha$, en déduire que le triangle OAB est un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. On considère le point C d'affixe $c = -1 + \dfrac{1}{2}\text{i}$. Déterminer l'affixe du point D tel que le triangle OCD soit un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{\text{OC}}, \overrightarrow{\text{OD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
   On pourra conjecturer l'affixe de D à l'aide de la figure pour traiter la question suivante.
3. Soit M le milieu de [CB]. On appelle $z_{\overrightarrow{\text{OM}}}$ et $z_{\overrightarrow{\text{DA}}}$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{\text{OM}}$ et $\overrightarrow{\text{DA}}$. Prouver que : $\dfrac{z_{\overrightarrow{\text{OM}}}}{z_{\overrightarrow{\text{DA}}}} = \dfrac{1}{2}\text{i}$.
4. Donner une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{DA}}, \overrightarrow{\text{OM}}\right)$.
5. Prouver que $\text{OM} = \dfrac{1}{2}\text{DA}$.
6. On appelle J, K et L les milieux respectifs des segments [CD], [DA] et [AB].
   On admet que le quadrilatère JKLM est un parallélogramme. Démontrer que c'est un carré.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

ABC est un triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Soit t un nombre réel fixe et soient les points $M,\ N$ et P, deux à deux distincts, définis par

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BN} = t\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{CP} = t\overrightarrow{CA}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence d'une unique similitude directe σ qui transforme les points A, B et C en respectivement $M,\ N$ et P, et d'en préciser les éléments caractéristiques.

On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ direct.

On note $a,\ b,\ c,\ m,\ n$ et p, les affixes respectives des points A, B, C, $M,\ N$ et P.

1. On rappelle que toute similitude conserve le barycentre.

  a. Exprimer $m,\ n$ et p en fonction de $a,\ b,\ c$ et t.

  b. En déduire que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.
  Ou notera G ce centre de gravité.

  c. On suppose que σ existe. Déterminer l'image de G par σ.

2. On considère la rotation r dc centre G et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

  a. Vérifier que M est le barycentre du système de points $\{\text{A}(1-t)\ ;\ \text{B}(t)\}$, et en déduire que $r(M) = N$.
  On admet de même que $r(N) = P$ et $r(P) = M$.

  b. Soit σ_1, la similitude directe de centre G de rapport $\dfrac{\text{G}M}{\text{GA}}$ et d'angle $\left(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM}\right)$.
  Montrer qu'elle transforme les points A, B et C en respectivement $M,\ N$ et P.

  c. Conclure sur l' existence et l'unicité de σ.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Question de cours

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soient u et v deux fonctions continues, dérivables sur I telles que u' et v' soient continues sur I.

Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ de I.

Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

On note f' la fonction dérivée de f.

On suppose que f' est continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. Utiliser la question de cours pour montrer que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - \int_0^1 x f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 (f(x) - f(1))\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On désigne par ln la fonction logarithme nepérien.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-2\ ;\ 2[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right).$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f sur l'intervalle $]-2\ ;\ 2[$ dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2\,;\,2[$ on a $f'(x) = \dfrac{4}{4-x^2}$.

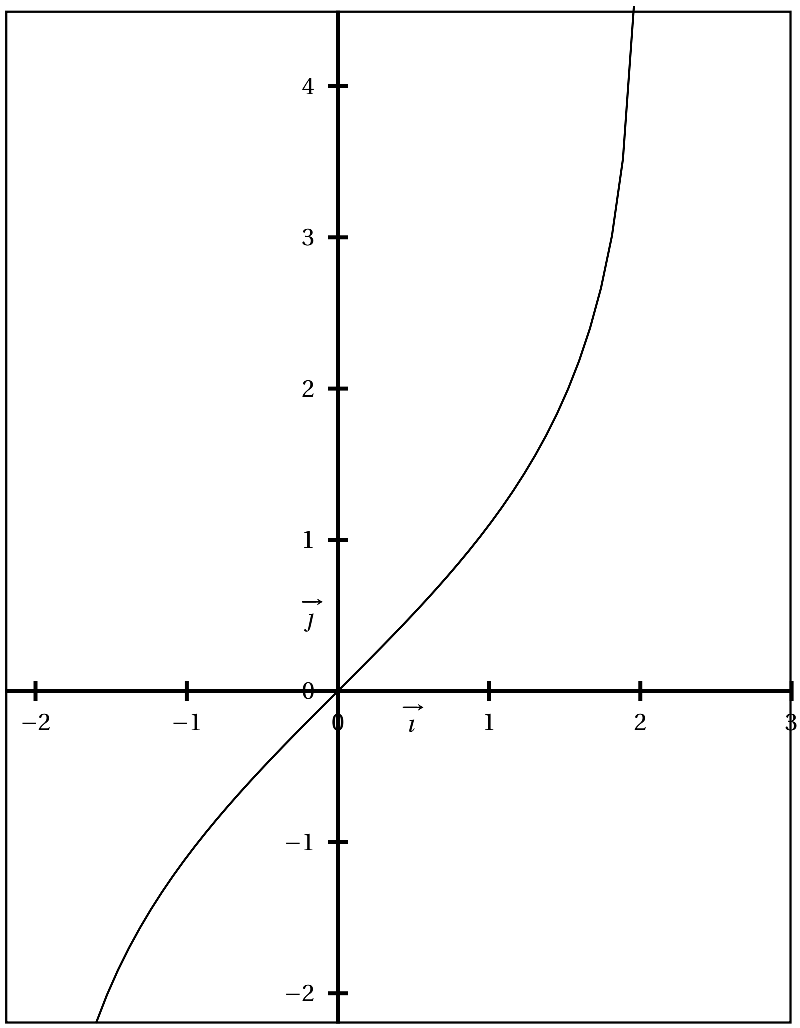
   b. En déduire les variations de f sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$.

Partie C

La courbe $\mathcal{C}$ est tracée sur la feuille annexe.
Hachurer sur cette feuille la partie $\mathcal{P}$ du plan constituée des points $M(x\,;\,y)$ tels que

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant y \leqslant \ln 3.$$

En utilisant la partie A, calculer en cm^2 l'aire de $\mathcal{P}$.



EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ une suite.
On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \text{e}^{-v_n} + 1$.

Partie A

Pour chacune des questions, quatre propositions sont proposées dont une seule est exacte.
Pour chacune des questions donner, sans justification, la bonne réponse sur votre copie.
Une bonne réponse donne 0,75 *point, une mauvaise réponse enlève* 0,25 *point et l'absence de réponse est comptée* 0 *point.*
Tout total négatif est ramené à zéro.

1. a est un réel strictement positif et ln désigne la fonction logarithme népérien.
Si $v_0 = \ln a$ alors :

a. $u_0 = \dfrac{1}{a} + 1$ **b.** $u_0 = \dfrac{1}{1+a}$ **c.** $u_0 = -a+1$ **d.** $u_0 = \mathrm{e}^{-a} + 1$

2. Si v est strictement croissante, alors :

a. u est strictement décroissante et majorée par 2

b. u est strictement croissante et minorée par 1

c. u est strictement croissante et majorée par 2

d. u est strictement décroissante et minorée par 1

3. Si v diverge vers $+\infty$, alors :

a. u converge vers 2

b. u diverge vers $+\infty$

c. u converge vers 1

d. u converge vers un réel ℓ tel que $\ell > 1$

4. Si v est majorée par 2, alors :

a. u est majorée par $1 + \mathrm{e}^{-2}$

b. u est minorée par $1 + \mathrm{e}^{-2}$

c. u est majorée par $1 + \mathrm{e}^{2}$

d. u est minorée par $1 + \mathrm{e}^{2}$

Partie B (1 point)
Démontrer que pour tout entier naturel non nul, on a $\ln(u_n) + v_n > 0$.