Durée : 4 heures

Baccalauréat S La Réunion juin 2007

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.

On désigne par A et par B les points d'abscisses respectives a et b de la courbe Γ représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère orthononnal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Les points Q et R sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Donner l'équation réduite de la tangente (T) au point A à la courbe Γ.

   b. Déterminer l'ordonnée du point d'intersection P de (T) avec l'axe des ordonnées.

   Calculer la longueur PQ. En déduire une construction simple de (T) ; la réaliser sur la figure en annexe.

2. **Restitution organisée de connaissances**

   On suppose connue la propriété :

   « Pour tout couple $(x\,;\,y)$ de nombres réels strictement positifs, on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. »

   En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a $\ln\left(\sqrt{m}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(m)$.

3. Utiliser le résultat de la question 2 pour placer sur l'axe des abscisses le point G d'abscisse $\sqrt{ab}$. Expliquer la construction et la réaliser sur la figure de l'annexe 1 (on laissera les traits de construction apparents).

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel tel que $-1 < a < 0$.

On considère la suite u définie par $u_0 = a$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

1. Étudier la monotonie de la suite u.

2. **a.** Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + x$.

   Étudier le sens de variations de la fonction h.

   En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,0[$, le nombre $h(x)$ appartient aussi à l'intervalle $]-1\,;\,0[$.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $-1 < u_n < 0$.

3. Étudier la convergence de la suite u. Déterminer, si elle existe, sa limite.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1. \end{cases}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Établir que, pour tout nombre réel x non nul, on a $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$.
En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Donner, sans démontrer, la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x - 1}$ et démontrer que f est continue en 0.

3. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a : $e^x \geqslant x+1$, et que l'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.

b. Calculer la dérivée f' de la fonction f et déterminer la fonction g telle que, pour tout nombre réel x non nul, $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^2}$.

c. Donner le tableau des variations de f.

4. Soient x un nombre réel non nul et les points $M(x\ ;\ f(x))$ et $M'(-x\ ;\ f(-x))$ de la courbe $\mathscr{C}$.

a. Établir que $f(-x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$, puis déterminer le coefficient directeur de la droite (MM').

b. On admet que la fonction f est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n 'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. A, B, C désignent les points d'affixes respectives $a = -2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - 3i$ et $c = 2i$.

1. **a.** Écrire b sous forme exponentielle.

b. Les points A et C sont représentés sur la figure jointe en annexe 2.
Construire à la règle et au compas le point B sur ce dessin (laisser les traces de construction apparentes).

2. On désigne par E le barycentre du système $\{(A\,;1)\,;(C\,;3)\}$ et par F le barycentre du système $\{(A\,;2)\,;(B\,;1)\}$.

a. Établir que l'affixe e du point E est égale à $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$.

b. Déterminer l'affixe f du point F.

3. **a.** Démontrer que le quotient $\dfrac{e - c}{e - b}$ peut s'écrire ki où k est un nombre réel à déterminer.
En déduire que, dans le triangle ABC, le point E est le pied de la hauteur issue de B. Placer le point E sur le dessin.

b. Démontrer que le point F possède une propriété analogue. Placer F sur le dessin.

4. On désigne par H le barycentre du système $\{(A\,;2)\,;(B\,;1)\,;(C\,;6)\}$. Démontrer que le point H est le point d'intersection des droites (BE) et (CF).
Qu'en déduit-on pour le point H ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. A, B, C, désignent les points d'affixes respectives $a = -2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - 3i$ et $c = 2i$.

1. **a.** Écrire b sous forme exponentielle.

b. Les points A et C sont représentés sur la figure jointe en annexe 2.
Construire à la règle et au compas le point B sur ce dessin (laisser les traces de construction apparentes).

c. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)$ et de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$.

2. Les points E et F ont pour affixes respectives $e = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\text{i}$ et $f = -\sqrt{3} - \text{i}$.

a. Démontrer que les points A, E et C, d'une part, et les points A, F et B, d'autre part, sont alignés,

b. Démontrer que le quotient $\frac{e-c}{e-b}$ peut s'écrire $k\text{i}$ où k est un nombre réel à déterminer.
Interpréter géométriquement ce résultat.
On admet que, de façon analogue, $\frac{f-c}{f-b}$ peut s'écrire $k'\text{i}$ où k' est un nombre réel non nul que l'on ne demande pas de déterminer.

c. Placer les points E et F sur la figure.

3. On désigne par S la similitude indirecte dont l'écriture complexe est

$$z \longmapsto \frac{1}{2}\overline{z} - \sqrt{3}.$$

Déterminer les images par S des trois points A, B et C.

4. Soit H le point d'intersection des droites (BE) et (CF). Placer le point S(H) sur la figure.

ANNEXE 1

(*À rendre avec la copie)*

Exercice 1