

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Métropole & La Réunion ∞
septembre 2007

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Les parties 1 et 2 portent sur un même thème, la dérivation, mais sont indépendantes.

1. Restitution organisée de connaissances

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si vraie ou fausse et justifier.

Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

– P : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée f' donnée sur \mathbb{R} par : $f'(x) = nx^{n-1}$.

– Q : Soit u une fonction dérivable sur \mathbb{R} et soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f = u^n$; alors f est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$.

2. On désigne par g la fonction définie sur $] -1 ; 1[$ par $g(0) = 0$ et $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $] -1 ; 1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.

On considère alors la fonction composée h définie sur $] -\pi ; 0[$ par $h(x) = g(\cos x)$.

a. Démontrer que pour tout x de $] -\pi ; 0[$ on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h .

b. Calculer $h\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ puis donner l'expression de $h(x)$.

EXERCICE 2

6 points

Commun à tous les candidats

1. La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$ pour tout entier naturel n .

a. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan **en annexe**, la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$ et le point A de coordonnées $(2 ; 0)$. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u .

b. Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $\ell = \frac{23}{18}$.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geq \frac{23}{18}$.

d. Étudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.

2. a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \text{ c'est-à-dire que } \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

b. La suite v est définie par $v_n = 1,2777\dots 7$ avec n décimales consécutives égales à 7.

Ainsi $v_0 = 1,2$, $v_1 = 1,27$ et $v_2 = 1,277$.

En utilisant le a démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).

3. La suite u définie au 1 et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.

EXERCICE 3**5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Soit les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}, z_2 = 2 + 2i \quad \text{et} \quad Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

- Écrire Z sous forme algébrique.
- Donner les modules et arguments de z_1 , z_2 et Z .
- En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
- Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1 , z_2 et Z . Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).
- Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007} .

EXERCICE 3**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

- On considère l'ensemble $A_7 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
 - Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau figurant en annexe 2 l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1 \pmod{7}$.
 - Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5 \pmod{7}$ équivaut à $x \equiv 4 \pmod{7}$.
 - Si a est un élément de A_7 , montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0 \pmod{7}$ sont les multiples de 7.
- Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. On considère l'ensemble $A_p = \{1 ; 2 ; \dots ; p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p . Soit a un élément de A_p .
 - Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1 \pmod{p}$.
 - On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p . Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p , de l'équation $ax \equiv 1 \pmod{p}$.
 - Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0 \pmod{p}$ si et seulement si x est un multiple de p où y est un multiple de p .
 - Application : $p = 31$. Résoudre dans A_{31} les équations : $2x \equiv 1 \pmod{31}$ et $3x \equiv 1 \pmod{31}$. À l'aide des résultats précédents, résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{31}$.

EXERCICE 4**4 points****Commun à tous les candidats**On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$:

(E) : $y' + (1 + \tan x)y = \cos x$

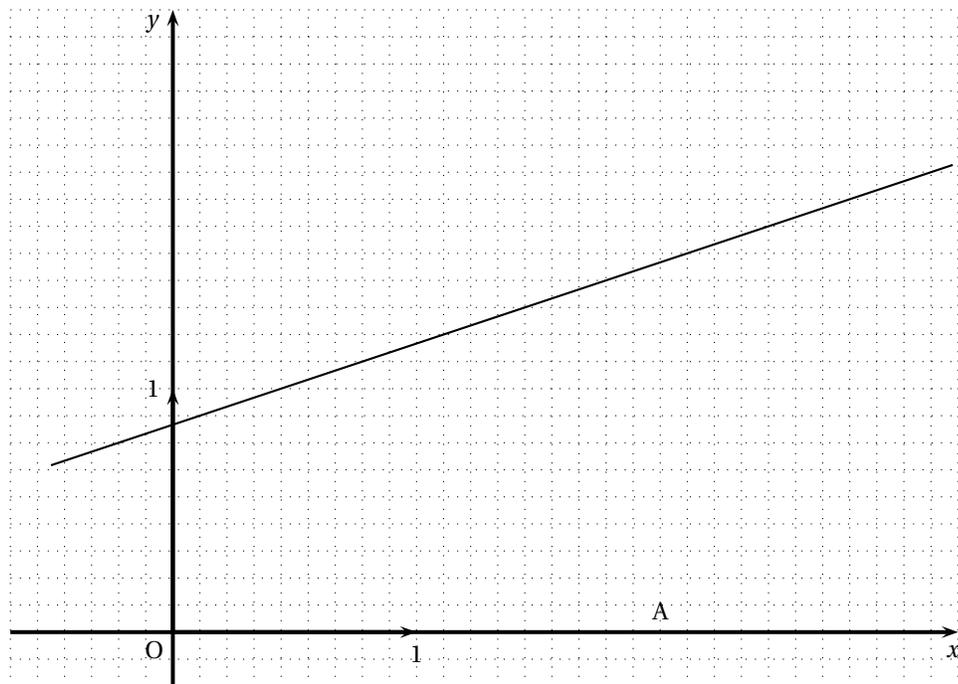
(E₀) : $y' + y = 1$.

- Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E₀).
- Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$ et telles que $f(x) = g(x) \cos x$. Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E₀).
- Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

ANNEXE 1

(À compléter et à rendre avec la copie)

Exercice 2



ANNEXE 1

(À compléter et à rendre avec la copie)

Exercice 3 (spécialité)

a	1	2	3	4	5	6
y						6