Durée : 4 heures

Baccalauréat S Métropole & La Réunion septembre 2009

EXERCICE 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(x^2 + 4)$.

PARTIE A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle$[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
   (a) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Montrer que sur l'intervalle $[2\ ;\ 3]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α. Donner la valeur arrondie de α à 10^{-1} .
   (c) Justifier que le nombre réel α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

PARTIE B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+l} = f(u_n)$.
La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$ sont tracées sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).

1. À partir de u_0, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière, placer les termes u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.
2. Placer le point I de la courbe $\mathscr{C}$ qui a pour abscisse α.
3. (a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) converge.
   (c) Déterminer sa limite.

EXERCICE 2 : (5 points)

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\right)$.

1. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x + y - 1 = 0$ et par $\mathscr{P}'$ le plan d'équation $y + z - 2 = 0$.
   Justifier que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants et vérifier que leur intersection est la droite $\mathscr{D}$, dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{array}\right.$, où t désigne un nombre réel.
2. (a) Déterminer une équation du plan $\mathscr{R}$ passant par le point O et orthogonal à la droite $\mathscr{D}$.

(b) Démontrer que le point I, intersection du plan $\mathscr{R}$ et de la droite $\mathscr{D}$, a pour coordonnées $(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

3. Soient A et B les points de coordonnées respectives $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et $(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$.
   (a) Vérifier que les points A et B appartiennent au plan $\mathscr{R}$.
   (b) On appelle A' et B' les points symétriques respectifs des points A et B par rapport au point I. Justifier que le quadrilatère ABA' B' est un losange.
   (c) Vérifier que le point S de coordonnées $(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.
   (d) Calculer le volume de la pyramide SABA' B'.

   On rappelle que le volume V d'une pyramide de base d'aire b et de hauteur h est : $V = \frac{1}{3} b \times h$.

EXERCICE 3 : (4 points)

Commun à tous les candidats

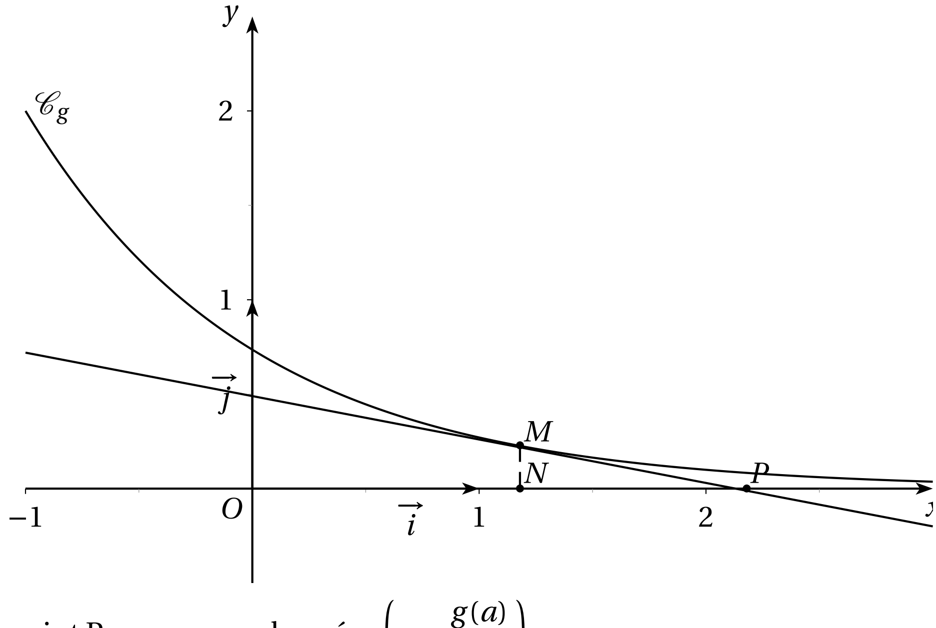
PARTIE A

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = \mathrm{e}^x$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

1. Soit a un nombre réel. Démontrer que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M d'abscisse a coupe l'axe des abscisses au point P d' abscisse $a - 1$.
2. Soit N le projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses. Démontrer que $\overrightarrow{NP} = -\vec{i}$

PARTIE B

Soit g une fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels telle que $g'(x) \neq 0$ pour tout nombre réel x.
On appelle $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.
Soit a un nombre réel. On considère le point M de la courbe $\mathscr{C}_g$ d'abscisse a et le point N projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses.
Soit P le point d'intersection de la tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point M avec l'axe des abscisses.
Le graphique ci-dessous illustre la situation de la partie B.



1. Démontrer que le point P a pour coordonnées $\left(a - \frac{g(a)}{g'(a)}\right)$.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Existe-t-il une fonction g vérifiant $g(0) = 2$ et $\overrightarrow{NP} = \vec{i}$?

EXERCICE 4 : (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.
Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

1. Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.
   (a) Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.
   (b) Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur ? On donnera la valeur arrondie du résultat à 10^{-3}.
2. Le réparateur choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus.
   Quelle est alors la probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut ? On donnera la valeur arrondie à 10^{-3}.
3. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaison.
   On fait l'hypothèse que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
   On rappelle que, pour tout nombre réel k positif : $P(X \leqslant k) = \int_0^k \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$
   (a) Montrer que $P(500 \leqslant X \leqslant 1000) = \mathrm{e}^{-500\lambda} - \mathrm{e}^{1000\lambda}$.
   (b) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1000 kilomètres sans crevaison étant égale à $\frac{1}{4}$, déterminer la valeur arrondie à 10^{-4} du paramètre λ.

EXERCICE 4 : (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. (a) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2009 par 11.
   (b) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.
   (c) Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11.
2. On désigne par p un nombre entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul n le nombre $A_n = 2^n + p$.

   On note d_n le PGCD de A_n et A_{n+1}.
   (a) Montrer que d_n divise 2^n.
   (b) Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p. Justifier.
   (c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Déterminer la parité de d_n en fonction de celle de p.

   En déduire le PGCD de $2^{2009} + 2009$ et $2^{2010} + 2009$.

ANNEXE DE L'EXERCICE 1

(à rendre avec la copie)