∽ Baccalauréat ES Amérique du Nord 29 mai 2008 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

f est une fonction définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 + \frac{1}{x+2}.$$

On note f' sa fonction dérivée et $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la bonne réponse sur l'annexe 1 *à remettre avec la copie.*
Aucune justification n'est demandée.
Barème : une bonne réponse rapporte 0,5 *point. Une mauvaise réponse enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est ramenée à* 0.

COMPLÉTER LE DOCUMENT RÉPONSE EN ANNEXE

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
Pour faire connaître l'ouverture d'un nouveau magasin vendant des salons, le directeur fait distribuer des bons publicitaires permettant de recevoir un cadeau gratuit sans obligation d'achat.
Une enquête statistique préalable a montré que, parmi les personnes qui entrent dans le magasin :

- 90 % entrent dans le magasin avec ce bon publicitaire. Parmi elles, 10 % achètent un salon.
- Parmi les personnes qui entrent sans bon publicitaire, 80 % achètent un salon.

Une personne entre dans le magasin.
On note :

B l'évènement « la personne a un bon publicitaire ».
$\overline{\text{B}}$ l'évènement « la personne n'a pas de bon publicitaire».
S l'évènement « la personne achète un salon ».
$\overline{\text{S}}$ l'évènement contraire de S.

Partie I

1. Dessiner un arbre pondéré représentant la situation.
2. À l'aide de B, $\overline{\text{B}}$, S, $\overline{\text{S}}$, traduire les évènements suivants et calculer leur probabilité à 10^{-2} près :
   a. la personne n'achète pas de salon sachant qu'elle est venue avec un bon publicitaire ;
   b. la personne achète un salon ;
   c. la personne est venue avec un bon publicitaire sachant qu'elle a acheté un salon.

Partie II
Le bon publicitaire et le cadeau associé coûtent 15 € au magasin. Un salon vendu rapporte 500 € au magasin s'il est vendu sans bon publicitaire.

1. Compléter le tableau en **annexe I** qui donne la loi de probabilité du bénéfice réalisé par le magasin selon la situation de la personne entrant.

Situation de la personne entrant	La personne a un bon publicitaire et achète un salon	La personne a un bon publicitaire et n'achète pas un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et achète un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et n'achète pas un salon
Bénéfice réalisé par le magasin en euros	485	-15	500	0
Probabilité				

2. Calculer le bénéfice moyen du magasin réalisé par personne entrant.
3. Le directeur pense changer la valeur du cadeau offert. Soit x le prix de revient, en euros, du nouveau bon publicitaire. Calculer, dans ce cas, l'espérance E de la loi de probabilité du bénéfice du magasin en fonction de x.
4. Le directeur souhaite réaliser 76 € de bénéfice moyen par personne entrant. Quel doit être le prix de revient x du nouveau bon publicitaire ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties I et II sont indépendantes

Partie I (calculs exacts demandés)

Sur une route, deux intersections successives, "a" et "b" sont munies de feux tricolores. On suppose que ces feux ne sont pas synchronisés et fonctionnent de manière indépendante On admet que :

– La probabilité que le feu de "a" soit vert est égale à $\dfrac{3}{4}$;

– La probabilité que le feu de "b" soit vert est égale à $\dfrac{1}{2}$.

On note A l'évènement : « le feu de "a" est vert », B l'évènement « le feu de "b" est vert ».

Un automobiliste passe successivement aux deux intersections "a" et "b".

1. Calculer la probabilité qu'à son passage, les deux feux soient verts.
2. Calculer la probabilité qu'à son passage, il rencontre au moins un feu vert.

Partie II (résultats demandés à 10^{-2} près)

Pour se rendre à son travail, Mathurin rencontre une succession d'intersections de feux tricolores dont le fonctionnement est décrit ci-dessous :

À chaque intersection :

– Si le feu est vert, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité $0,9$ ou sera rouge avec la probabilité $0,05$.

– Si le feu est orange, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité $0,1$ ou sera vert avec la probabilité $0,8$.

– Si le feu est rouge, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité $0,5$ ou sera orange avec la probabilité $0,05$.

n étant un entier naturel non nul, on note :

– V_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu vert à la n-ième intersection,

– O_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu orange a la n-ième intersection,
– R_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu rouge à la n-ième intersection,
– $P_n = [V_n \ \ O_n \ \ R_n]$ la matrice traduisant l'état probabiliste du n-ième feu tricolore.

1. **a.** Construire un graphe probabiliste pour décrire cette situation.
   b. Donner la matrice de transition M complétée de ce graphe :

$$M = \begin{bmatrix} \dots & 0,05 & 0,05 \\ 0,8 & \dots & 0,1 \\ 0,45 & \dots & 0,5 \end{bmatrix}$$

2. **a.** Si le premier feu rencontré est vert, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2.
   b. On donne $P_3 = [0,87 \ \ 0,05 \ \ 0,08]$. Quelle est la probabilité que le quatrième feu soit vert ?
3. Si le premier feu rencontré est rouge, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2.
4. On remarque que, quelle que soit la couleur du premier feu rencontré, on obtient à partir d'un certain rang n : $P_n = [0,85 \ \ 0,05 \ \ 0,10]$.
   Donner une interprétation concrète de ce résultat.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Historiquement, on avait décidé de numéroter les planètes du système solaire suivant leur distance moyenne au Soleil. Ainsi, on notait :

Mercure	=	1
Venus	=	2
Terre	=	3
Mars	=	4
Céres	=	5
Jupiter	=	6
Saturne	=	7
Uranus	=	8

On considère la série statistique double $(i\ ;\ d_i)_{1 \leqslant i \leqslant 8}$, où i représente le numéro d'ordre de la planète et d_i sa distance au soleil (en millions de km) :
(1 ; 57,94), (2 ; 108,27), (3 ; 149,60), (4 ; 228,06), (5 ; 396,44), (6 ; 778,73), (7 ; 1 427,7), (8 ; 2 872,4).

1. Indiquer, à l'aide d'une phrase, la signification du couple (3 ; 149,60).

   Dans la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

2. Compléter, dans l'annexe 1, le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
d_i	57,94	108,27	149,60	228,06	396,44	778,73	1 427,7	2 872,4
$d_i - d_1$	0			170,12				
$y_i = \ln(d_i - d_1)$	×			5,137				

3. **a.** Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement (D), de la série $(i\ ;\ y_i)$, avec i compris entre 2 et 8.

b. Construire le nuage de points $(i\ ;\ y_i)$, avec i compris entre 2 et 8, et la droite (D) dans un repère orthonormal, unités : 2 cm

4. **a.** Déduire de ce qui précède que l'on peut modéliser l'expression de d_i, en fonction de i, avec i compris entre 2 et 8, sous la forme $d_i = 57,94 + 12,16 \times 1,966^i$.

b. Calculer la distance moyenne probable au soleil d'une planète numérotée 9.

(*Ce résultat est connu sous le nom de loi de Titius-Bode du nom dc deux astronomes allemands qui permirent la découverte de Neptune n*^{o} 9 *en* 1848. *La loi tomba ensuite en désuétude mais l'ajustement étudié demeure excellent si l'on inclut « Pluton »... La planète naine en n*^{o} 10).

EXERCICE 4 **6 points**

Commun a tous les candidats

Rappel : Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction e^u *est dérivable sur I et* $\left(e^u\right)' = u'e^u$.

Un transporteur, s'occupant de voyages organisés, achète en l'an 2000 (instant initial $t = 0$), un autocar nécessitant un investissement initial de 200 milliers d'euros.

Partie A

Cet investissement se déprécie. Sa dépréciation cumulée, en milliers d'euros, a l'instant t, mesurée en années, est notée $D(t)$.
On pose

$$D(t) = 200\left(1 - \text{e}^{-0,086t}\right) \quad \text{pour tout réel } t \text{ de l'intervalle I} = [0\ ;\ 13].$$

L'annexe 2 donne la courbe représentative de D dans le plan rapporté à un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Déterminer graphiquement au cours de quelle année l'investissement aura perdu 60 % de sa valeur (faire apparaître sur le graphique les tracés qui permettent d'obtenir la réponse).

Partie B

Le transporteur veut revendre l'autocar. On note $V(t)$ la valeur de l'autocar l'année t, $0 \leqslant t \leqslant 13$.

1. Vérifier que $V(t) = 200 \times \text{e}^{-0,086t}$.

2. Étudier le sens de variation de V sur $[0\ ;\ 13]$.

3. Combien peut-on espérer revendre l'autocar au bout de 13 ans de service ? (au millier d'euros près).

4. Au cours de quelle année l'autocar a-t-il perdu la moitié de sa valeur ?

Partie C

On estime que les recettes nettes (en milliers d'euros) procurées par l'exploitation de cet autocar, hors dépréciation du véhicule, sont données à l'instant t réel de l'intervalle $[0\ ;\ 13]$ par :

$$R(t) = 110\left(5 + t - 5\text{e}^{0,1t}\right).$$

1. **a.** Calculer la dérivée R' de la fonètion R ; étudier son signe sur $[0\ ;\ 13]$ et construire le tableau de variations de R.

b. En déduire, que les recettes nettes sont maximales pour une valeur t_0 de t dont on donnera la valeur exacte puis une valeur approchée arrondie à l'unité près.

c. Construire la courbe représentative de la fonction R, dans le même repère que celle de D après avoir complété le tableau de valeurs de **l'annexe 2** où l'on arrondira $R(t)$ à l'entier le plus proche.

2. À tout instant, la différence $R(t) - D(t)$ représente l'exploitation $E(t)$ de l'autocar.

Compléter le tableau de **l'annexe 2**, utiliser le graphique ou les tableaux de valeurs de D, R et E pour répondre aux questions suivantes :

a. Au cours de quelle année l'exploitation de cet autocar est-elle la plus profitable ?

b. À partir de quelle année l'exploitation de-cet autocar conduit-elle à un déficit ?

ANNEXE I
(À remettre avec la copie)

EXERCICE 1

$f(x) = \dfrac{3x+6}{x+2}$	☐ VRAI	☐ FAUX
La courbe ($\mathscr{C}$) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3,5.	☐ VRAI	☐ FAUX
$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = 3$	☐ VRAI	☐ FAUX
$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 6\ln 2.$	☐ VRAI	☐ FAUX
La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à ($\mathscr{C}$)	☐ VRAI	☐ FAUX
$f(x) > 3$ pour tout x de $]-2\ ;\ +\infty[$.	☐ VRAI	☐ FAUX
$f'(-1) = -1$.	☐ VRAI	☐ FAUX
La fonction g définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \ln[f(x)]$ est décroissante.	☐ VRAI	☐ FAUX

EXERCICE 2

Situation de la personne entrant	La personne a un bon publicitaire et achète un salon	La personne a un bon publicitaire et n'achète pas un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et achète un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et n'achète pas un salon
Bénéfice réalisé par le magasin en euros	485	-15	500	0
Probabilité				

EXERCICE 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8
d_i	57,94	108,27	149,60	228,06	396,44	778,73	1 427,7	2 872,4
$d_i - d_1$	0			170,12				
$Y_i = \ln(d_i - d_1)$	×			5,137				

ANNEXE 2
(À remettre avec la copie)

EXERCICE 4

Représentation graphique

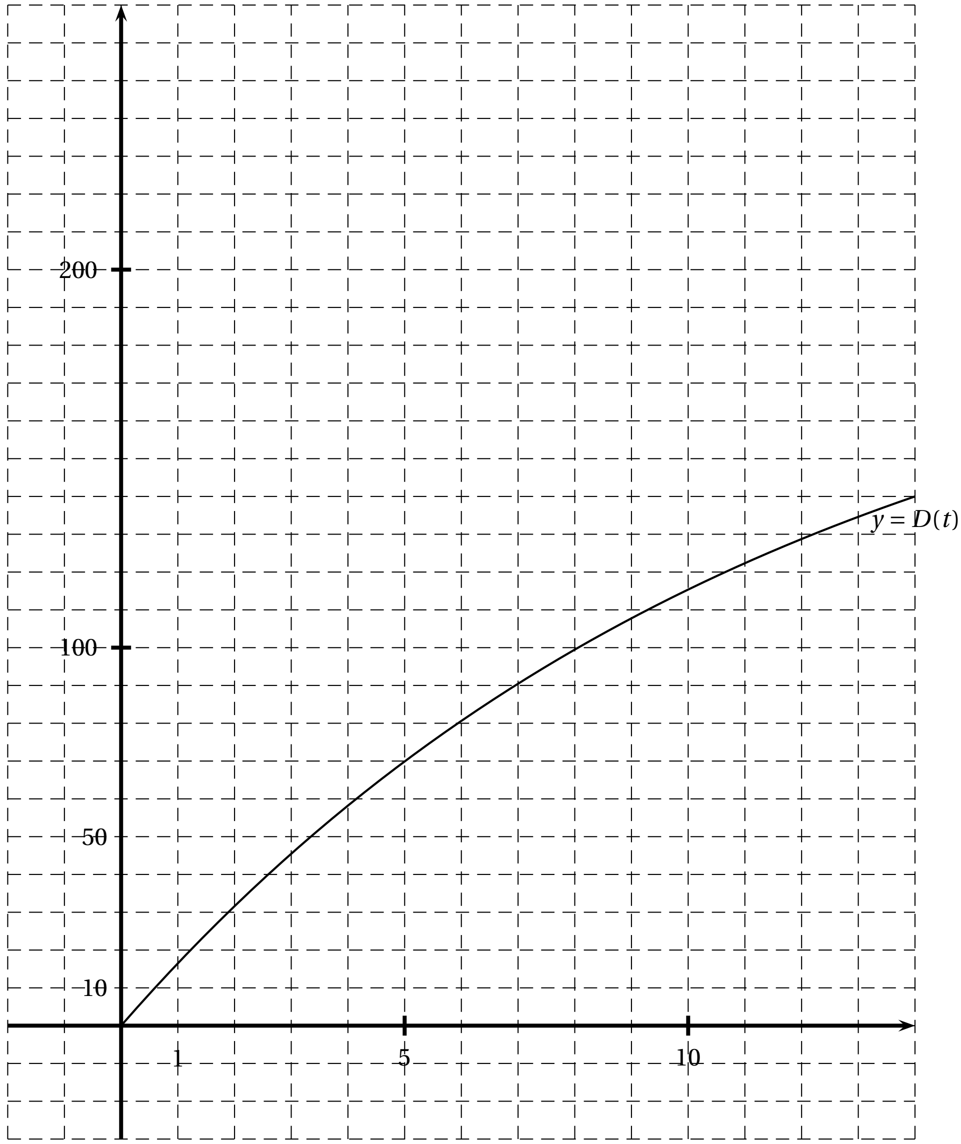

Tableau de valeurs :

t	0	1	2	4	6	8	10	11	13
$D(t)$	0	16	32	58	81	99	115	122	135
$R(t)$	0	52	98		208				−38
$E(t)$	0				127				