Baccalauréat ES Polynésie septembre 2008

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des six questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.

Barème : une réponse exacte rapporte 0,5 *point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point.*

1. $e^{-2\ln 3}$ est égal à
   - $\dfrac{2}{3}$
   - $\dfrac{1}{9}$
   - 9
2. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $e^{3x} - 1 \geqslant 0$ est l'intervalle :
   - $[0 ; +\infty[$
   - $[1 ; +\infty[$
   - $\left[\dfrac{1}{3} ; +\infty\right[$
3. Une primitive de la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln x + 1$ est :
   - $x \longmapsto x\ln x + x$
   - $x \longmapsto x\ln x$
   - $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
4. Le prix TTC (toutes taxes comprises) d'un article est 299 €. Sachant que le taux de la TVA est de 19,6 %, son prix HT (hors taxes) est :
   - 240,40 €
   - 250 €
   - 279,40 €
5. Lors d'une expérience aléatoire, on considère deux évènements indépendants A et B tels que $P(\text{A}) = 0,6$ et $P(\text{B}) = 0,2$. On a alors :
   - $P(\text{A} \cup \text{B}) = 0,8$
   - $P(\text{A} \cup \text{B}) = 0,68$
   - $P(\text{A} \cup \text{B}) = 0,92$
6. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique telle que : $U_0 = 2$ et $U_8 = 32$.
   Sa raison est égale à :
   - $\sqrt{2}$
   - 2
   - 4

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

On considère un groupe de 2 000 lecteurs, tous abonnés à une des revues la *Drosera*, *l'Iguane* ou le *Nénuphar*. Chacun d'eux n'est abonné qu'à une revue et ne lit que celle-là.

Parmi ces abonnés :

- 400 abonnés lisent la *Drosera*, et 20 % des abonnés à la *Drosera* sont des femmes ;
- 700 abonnés lisent *l'Iguane* et 30 % des abonnés à *l'Iguane* sont des femmes
- les autres abonnés lisent le *Nénuphar* et 60 % des abonnés au *Nénuphar* sont des femmes.

On choisit un lecteur au hasard parmi ces abonnés.

On note par D, I, N, F et H les évènements suivants :

- D : « l'abonné lit la *Drosera* » ;
- I : « l'abonné lit *l'Iguane* » ;
- N : « l'abonné lit le *Nénuphar* » ;
- F : « l'abonné est une femme » ;
- H : « l'abonné est un homme ».

1. Traduire les données de l'exercice à l'aide d'un arbre de probabilité.

   a. Calculer la probabilité que l'abonné soit une femme lisant la *Drosera*.

b. Calculer la probabilité que l'abonné soit une femme lisant *l'Iguane*.

c. Démontrer que la probabilité que l'abonné soit une femme est égale à 0,415.

d. Sachant que l'abonné choisi est une femme, calculer la probabilité qu'il soit lecteur de la *Drosera* (*le résultat sera donné sous forme décimale, arrondi au millième*).

e. On interroge au hasard et de façon indépendante trois abonnés.
Quelle est la probabilité qu'aucun des abonnés ne soit une femme lectrice du *Nénuphar* (*le résultat sera donné sous forme décimale, arrondi au millième*) ?

EXERCICE 2 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Partie A

Soit la suite (U_n) définie par la donnée de son premier terme $U_0 = 14\,000$ et par la relation :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ U_{n+1} = 1,04 \times U_n + 200.$$

a. Calculer U_1 et U_2.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n + 5\,000$.

i. Calculer V_0.

ii. Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n.
En déduire que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

iii. Exprimer V_n en fonction de n.

iv. En déduire que $U_n = 19\,000 \times (1,04)^n - 5\,000$.

Partie B

On suppose que U_n représente le salaire annuel d'une personne pour l'année $2002 + n$, n étant un entier naturel.

a. Calculer le salaire annuel, arrondi à l'euro, de la personne en 2010.

b. i. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x : $1,04^x \geqslant \dfrac{33}{19}$.

ii. À partir de quelle année le salaire annuel de cette personne aura-t-il doublé par rapport à celui de 2002 ?

EXERCICE 3 — 6 points

Commun à tous les candidats.

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x-1} + x - 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

Partie A

a. Calculer $f(0)$ et $f(1)$. *On donnera les valeurs exactes.*

b. i. Calculer la limite de f en $-\infty$.

ii. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$.

c. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Partie B

a. i. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x réel et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.

ii. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

b.

2. **a.** Montrer que sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α.

b. Donner une valeur, arrondie au centième, de α.

c. Préciser le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.

3. Tracer la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie C

1. Déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\text{d}x$.

Donner la valeur exacte de I, puis une valeur décimale arrondie au centième.

Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats.

Le tableau suivant donne l'évolution de la population de l'Inde de 1951 à 1991.

année	1951	1961	1971	1981	1991
Rang x_i	1	2	3	4	5
Population y_i (en millions)	361	439	548	683	846
z_i					

On cherche à étudier l'évolution de la population y exprimée en millions d'habitants, en fonction du rang x de l'année.

1. Représenter graphiquement le nuage de points $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unités graphiques 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 100 millions sur l'axe des ordonnées.

2. **a.** À l'aide de la calculatrice, déterminer un ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés.

b. En utilisant cet ajustement, déterminer la population de l'Inde que l'on pouvait prévoir pour 2001, c'est-à-dire pour $x = 6$ (*le résultat sera arrondi au million*).

3. On cherche un autre ajustement et on se propose d'utiliser le changement de variable suivant : $z = \ln y$.

a. Recopier le tableau ci-dessus et compléter la dernière ligne (*les valeurs seront arrondies au millième*).

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un ajustement affine de z en fonction de x par la méthode des moindres carrés (*les coefficients seront arrondis au millième*).

c. En déduire qu'une approximation de la popu1ation y, exprimée en millions d'habitants, en fonction du rang x de l'année est donnée par :
$y \approx 289\mathrm{e}^{0,215x}$.

d. En utilisant cet ajustement, calculer la population que l'on pouvait prévoir pour 2001(*le résultat sera arrondi au million*).

4. Les résultats obtenus en 2001 ont révélé que la population comptait 1 027 millions d'habitants.

Déterminer une estimation de la population, arrondie au million d'habitants, en 2011 en choisissant le modèle qui semble le plus approprié. Justifier ce choix.