Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie novembre 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit g une fonction définie et dérivable sur l'ensemble $]-\infty\,;\,-5[\,\cup\,]-5\,;\,+\infty[$.
On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de g dans un repère donné du plan.
On donne ci-dessous le tableau de variations de g :

Valeurs de x	$-\infty$		-5		-1	4		$+\infty$
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0	5	$\searrow$	1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des huit affirmations ci-dessous, indiquer sur votre copie :
VRAI ou FAUX ou LES INFORMATIONS DONNÉES NE PERMETTENT PAS DE RÉPONDRE.
Aucune justification n'est demandée,
Une bonne réponse rapporte 0,5 *point. Une mauvaise réponse enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point.*
Si le total des points est négatif la note globale attribuée à l'exercice est 0

1. Pour tout réel $x \in]-1\,;\,+\infty[$, $g(x) \leqslant 5$.
2. Pour tout réel $x \in]-5\,;\,4]$, $g'(x) \geqslant 0$ (g' désigne la fonction dérivée de g).
3. La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
4. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une droite asymptote en $-\infty$.
5. On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln[g(x)]$ où ln désigne la fonction logarithme népérien :
   a. Pour tout réel $x \in [4\,;\,+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$;
   b. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[4\,;\,+\infty[$;
   c. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
   d. $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} f(x) = -\infty$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la facture de gaz (en milliers d'euros) d'une entreprise pour les années 2000 à 2007.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7
Montant y_i (en milliers d'euros) de la facture de gaz	105	112	116	120	124	131	139	148

1. Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$ de cette série statistique dans un plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour une année sur l'axe des abscisses ; 1 cm pour 10 milliers d'euros sur l'axe des ordonnées en commençant à 50 milliers).

2. On utilise un ajustement affine comme premier modèle.

a. Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite (D) de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Pour chacun des coefficients, donner la valeur décimale arrondie au dixième.

b. Calculer le montant (arrondi au millier d'euros près) de la facture de gaz obtenue avec ce modèle pour l'année 2012.

3. Déterminer le pourcentage annuel moyen d'augmentation de cette facture entre 2000 et 2007 (arrondir à l'unité).

4. On envisage un second modèle pour prévoir l'évolution de cette facture ; on considère qu'à partir de 2007, la facture augmentera de 5 % chaque année.

Pour tout entier naturel n, on appelle u_n le montant (en milliers d'euros) de la facture de gaz obtenu avec ce second modèle pour l'année $2007+n$. Ainsi, $u_0 = 148$.

a. Calculer u_1.

b. Justifier que (u_n) est une suite géométrique de raison $1,05$.

c. Exprimer u_n en fonction de n.

d. Calculer le montant (arrondi au millier d'euros près) de la facture de gaz obtenue avec ce second modèle pour l'année 2012.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Lors d'un jeu, Marc doit répondre à la question suivante :

« Le premier jour, nous vous offrons 100 € puis chaque jour suivant, nous vous offrons 5 % de plus que la veille et une somme fixe de 20 €.
Au bout de combien de jours aurez-vous gagné 10 000 € ? »

1. Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le montant total en € versé à Marc le n-ième jour. Ainsi, $u_1 = 100$.

a. Calculer u_2.

b. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 1,05u_n + 20$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = u_n + 400$.

a. Calculer v_1.

b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

c. Exprimer v_n en fonction de n puis en déduire que
$u_n = 500 \times 1,05^{n-1} - 400$.

d. Déterminer, en fonction de n, la somme $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

3. Quelle réponse Marc doit-il donner ?

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Deux joueurs Roger et Raphaël disputent un match de tennis.
Dans cet exercice, on s'intéresse aux points gagnés par Roger lorsqu'il sert (c'est-à-dire lorsqu'il effectue la mise en jeu).

À chaque point disputé, Roger dispose de deux essais pour son service. S'il rate ces deux essais, il perd le point (on parle de double faute).

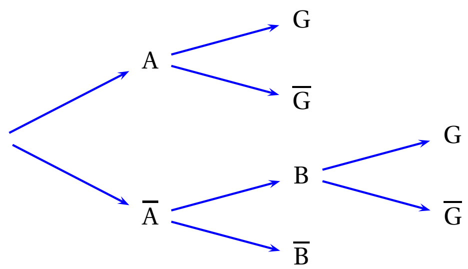
Roger s'apprête à servir. On note :

– A l'évènement « Roger réussit son premier service »,

– B l'évènement « Roger réussit son second service »,
– G l'évènement « Roger gagne le point ».
On note respectivement $\overline{\text{A}}$, $\overline{\text{B}}$ et $\overline{\text{G}}$ les évènements contraires respectifs des événements A, B et G.
Une étude sur les précédents matchs de Roger a permis d'établir que, lorsque Roger sert :

- il réussit dans 75 % des cas son premier essai et lorsque ce premier service est réussi, il gagne le point dans 92 % des cas.
- s'il ne réussit pas son premier essai, il réussit le second dans 96 % des cas et lorsque ce second service est réussi, il gagne le point dans 70 % des cas.

On va décrire la situation précédente par un arbre pondéré :



Les probabilités demandées seront données sous forme décimale arrondie, si nécessaire, au millième.

1. Reproduire l'arbre ci-dessus et le pondérer à l'aide des données du texte.
2. Quelle est la probabilité que Roger fasse une double faute ?
3. Quelle est la probabilité que Roger rate son premier service, réussisse le second et gagne le point ?
4. Montrer que la probabilité que Roger gagne le point est de $0,858$.
5. Sachant que Roger a gagné le point joué, quelle est la probabilité qu'il ait réussi son premier service ?
6. Les deux joueurs disputent quatre points de suite (Roger servant à chaque fois). On admet que chaque point joué est indépendant des points joués précédemment. Quelle est la probabilité que Roger ne gagne pas la totalité des quatre points ?

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats
Dans une entreprise, le résultat mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé en vendant x centaines d'objets fabriqués, est modélisé par la fonction B définie et dérivable sur l'intervalle $[1 ; 15]$ par :

$$B(x) = (x-5)\mathrm{e}^{u(x)} + 2 \quad \text{avec} \quad u(x) = -0,02x^2 + 0,2x - 0,5.$$

Si $B(x)$ est positif il s'agit d'un bénéfice, s'il est négatif il s'agit d'une perte.

1. On note B' la fonction dérivée de la fonction B et u' la fonction dérivée de la fonction u.
   a. Calculer $u'(x)$ et démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[1 ; 15]$, on a :
   $$B'(x) = (-0,04x^2 + 0,4x)\mathrm{e}^{u(x)}.$$
   b. Étudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 15]$ puis dresser le tableau de variations de la fonction B.

2. **Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.**

   Déterminer le nombre minimum d'objets que l'entreprise doit vendre pour réaliser un bénéfice.

   Pour quel nombre d'objets ce bénéfice est-il maximal ? Et quel est alors ce bénéfice maximal (arrondi à l'euro près) ?

3. La valeur moyenne m d'une fonction f qui admet des primitives sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$ est : $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

   a. Vérifier que $B(x) = -25 \times u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} + 2$.

   b. En déduire l'arrondi au millième de la valeur moyenne de B sur $[1\,;\,15]$.

   c. Interpréter ce résultat pour l'entreprise.