6. Antilles-Guyane septembre 2009

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère la surface S_1 d'équation $z = x^2 + y^2$, et la surface S_2 d'équation $z = xy + 2x$.

PARTIE A

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x = 2$, E_1 l'intersection de la surface S_1 et du plan $\mathscr{P}$ et E_2 l'intersection de la surface S_2 et du plan $\mathscr{P}$.

En **annexe**, le plan $\mathscr{P}$ est représenté muni du repère $\left(A\,;\, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ où A est le point de coordonnées $(2\,;0\,;0)$.

1. **a.** Déterminer la nature de l'ensemble E_1.
   b. Déterminer la nature de l'ensemble E_2.
2. **a.** Représenter les ensembles E_1 et E_2 sur la feuille **annexe**.
   b. Dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ donner les coordonnées des points d'intersection B et C des ensembles E_1 et E_2.

PARTIE B

On pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante :
« soient a, b et c des entiers avec a premier. Si a divise bc alors a divise b ou a divise c. »

L'objectif de cette partie est de déterminer les points d'intersection $M(x\,;\, y\,;\, z)$ des surfaces S_1 et S_2 où y et z sont des entiers relatifs et x un nombre premier.
On considère un tel point $M(x\,;\, y\,;\, z)$.

1. **a.** Montrer que $y(y - x) = x(2 - x)$.
   b. En déduire que le nombre premier x divise y.
2. On pose $y = kx$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   a. Montrer que x divise 2, puis que $x = 2$.
   b. En déduire les valeurs possibles de k.
3. Déterminer les coordonnées possibles de M et comparer les résultats avec ceux de la PARTIE A, question 2. b.