34. Polynésie juin 2007

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A (1 ; 3 ; 2), B(4 ; 6 ; −4) et le cône (Γ) d'axe $\left(O, \vec{k}\right)$, de sommet O et contenant le point A.

Partie A

1. Montrer qu'une équation de (Γ) est $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}z^2$.
2. Soit (P) le plan parallèle au plan (xOy) et contenant le point B.
   - **a.** Déterminer une équation de (P).
   - **b.** Préciser la nature de l'intersection (C_1) de (P) et de (Γ).
3. Soit (Q) le plan d'équation $y = 3$. On note (C_2) l'intersection de (Γ) et de (Q). Sans justification, reconnaître la nature de (C_2) parmi les propositions suivantes :
   - deux droites parallèles ;
   - deux droites sécantes ;
   - une parabole ;
   - une hyperbole ;
   - un cercle.

Partie B

Soient x, y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées (x, y, z). Les ensembles (C_1) et (C_2) sont les sections définies dans la partie A.

1. On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 = 40$ où x et y sont des entiers relatifs.
   - **a.** Résoudre l'équation (E).
   - **b.** En déduire l'ensemble des points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
2. - **a.** Démontrer que si le point M de coordonnées $(x ; y ; z)$ où x, y et z désignent des entiers relatifs est un point de (Γ) alors z est divisible par 2 et $x^2 + y^2$ est divisible par 10.
   - **b.** Montrer que si M est un point de (C_2), intersection de (Γ) et de (Q), alors $x^2 \equiv 1$ modulo 10.
   - **c.** Résoudre, dans l'ensemble des entiers relatifs, l'équation $x^2 \equiv 1$ modulo 10.
   - **d.** Déterminer un point de (C_2), distinct de A, dont les coordonnées sont des entiers relatifs.