Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles-Guyane 18 juin 2010

EXERCICE 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions suivantes, ***une ou deux des réponses*** *proposées sont correctes.*
Un point est attribué à chacune des questions. Toute réponse inexacte est pénalisée de 0,25 point.
Il n'y a pas de pénalité en cas d'absence de réponse. Aucune justification n'est attendue.
Si le total des points obtenus est négatif, le note attribuée à l'exercice est 0.

Recopier le numéro de la question et la ou les réponses correctes (deux au maximum).

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

A : $\frac{5}{8}$ **B :** $\frac{21}{32}$ **C :** $\frac{11}{32}$ **D :** $\frac{3}{8}$

2. On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes.
La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

A : $\frac{105}{248}$ **B :** $\frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}}$ **C :** $\frac{21^2}{32^2}$ **D :** $\frac{5^2}{8^2}$

3. On suppose que la durée d'attente à un guichet de service, exprimée en heure, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min est :

A : $\frac{1}{3}$ **B :** $\frac{1}{5}$ **C :** $\frac{1}{12}$ **D :** $\frac{1}{4}$

4. On considère 10 appareils identiques, de même garantie, fonctionnant indépendamment les uns des autres. La probabilité pour chaque appareil de tomber en panne durant la période de garantie est égale à 0,15.
La probabilité pour qu'exactement 9 appareils soient en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie est égale à :

A : 0,35 à 10^{-2} près **B :** $0{,}85^9$ **C :** $0{,}85^9 \times 0{,}15$ **D :** $0{,}85^9 \times 0{,}15 \times 10$

EXERCICE 2 — 5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ d'unité 1 cm.

1. **Restitution organisée de connaissances**

Pour $M?\Omega$, on rappelle que le point M' est l'image du point M par la rotation r de centre Ω et d'angle de mesure θ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Omega M' & = & \Omega M & (1)\\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\ ;\ \overrightarrow{\Omega M'}\right) & = & \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k \in \mathbb{Z}) & (2)\end{array}\right.$$

a. Soient z, z' et ω les affixes respectives des points M, M' et Ω.
Traduire le relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.

b. En déduire l'expression de z' en fonction de z, θ et ω

2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

3. Soient A et B les points d'affixes respectives $a = 2\sqrt{3} - 2\text{i}$ et $b = 2\sqrt{3} + 2\text{i}$.

a. Écrire a et b sous forme exponentielle.

b. Faire une figure et placer les points A et B.

c. Montrer que $\text{O}AB$ est un triangle équilatéral.

4. Soit C le point d'affixe $c = -8\text{i}$ et D son image par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
Placer les points C et D.
Montrer que l'affixe du point D est $d = 4\sqrt{3} + 4\text{i}$.

5. Montrer que D est l'image du point B par une homothétie de centre O dont on déterminera le rapport.

6. Montrer que $\text{O}AD$ est un triangle rectangle.

EXERCICE 2 — 5 points

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 1 cm.

1. Restitution organisée de connaissances
On utilisera sans démonstration les deux propriétés suivantes :

Propriété 1 : Toute similitude indirecte qui transforme un point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' admet une expression complexe de la forme $z' = a\overline{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Propriété 2 : Soit C une point d'affixe c. Pour tout point D, distinct de C, d'affixe d et pour tout point E, distinct de C, d'affixe e, on a :

$$\left(\overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{CE}\right) = \arg\left(\frac{e-c}{d-c}\right)\ \ (2\pi).$$

Question : Montrer qu'une similitude indirecte transforme un angle orienté en son opposé.

2. Soient les points C et D d'affixes respectives $c = 3$ et $d = 1 - 3\text{i}$, et $\mathcal{S}_1$ la similitude qui à tout point M du plan associe le point M_1 symétrique de M par rapport à l'axe $\left(\text{O}\ ;\ \vec{u}\right)$ des réels.

a. Placer les points C et D puis leurs images respectives C_1 et D_1 par $\mathcal{S}_1$. On complètera le figure au fur et à mesure de l'exercice.

b. Donner l'expression complexe de $\mathcal{S}_1$.

3. Soit $\mathcal{S}_2$ la similitude directe définie par :
- le point C_1 et son image C' d'affixe $c' = 1 + 4\text{i}$;
- le point D_1 et son image D' d'affixe $d' = -2 + 2\text{i}$.

a. Montrer que l'expression complexe de $\mathcal{S}_2$ est : $z' = \text{i}z + 1 + \text{i}$.

b. En déduire les éléments caractéristiques de cette similitude.

4. Soit $\mathscr{S}$ la similitude définie par $\mathscr{S} = \mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_1$.
Déterminer l'expression complexe de $\mathscr{S}$.

5. On pourra admettre désormais que $\mathscr{S}$ est la similitude indirecte d'expression complexe :

$$z' = \mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}.$$

a. Quelle est l'image de C par $\mathscr{S}$? Quelle est l'image de D par $\mathscr{S}$?

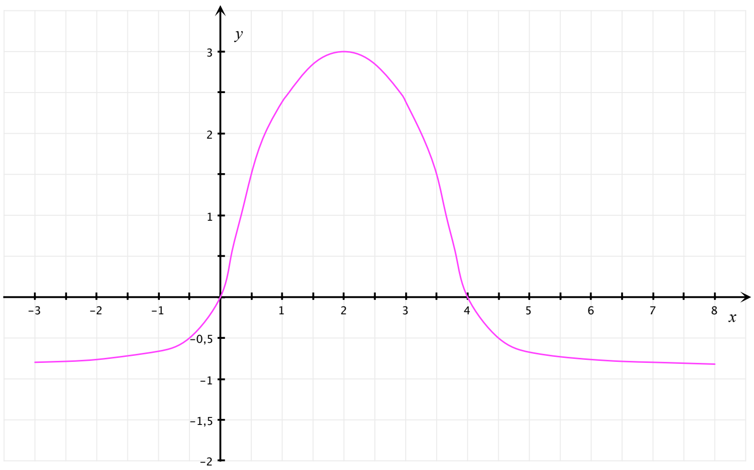
b. Soit H le point d'affixe h tel que : $h - c = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}(d - c)$.
Montrer que le triangle CDH est équilatéral direct.

c. Soit H' l'image de H par $\mathscr{S}$. Préciser la nature du triangle $C'D'H'$ et construire le point H' (on ne demande pas de calculer l'affixe h' du point H').

Exercice 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

On donne la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $I = [-3\ ;\ 8]$.



On définit la fonction F sur I, par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. **a.** Que vaut $F(0)$?

b. Donner le signe de $F(x)$:
– pour $x \in [0\ ;\ 4]$;
– pour $x \in [-3\ ;\ 0]$.
Justifier les réponses.

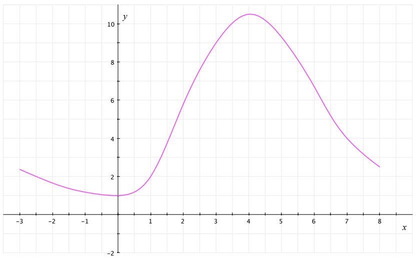
c. Faire figurer sur le graphique donné en **ANNEXE** les éléments permettant de justifier les inégalités $6 \leqslant F(4) \leqslant 12$.

2. **a.** Que représente f pour F ?

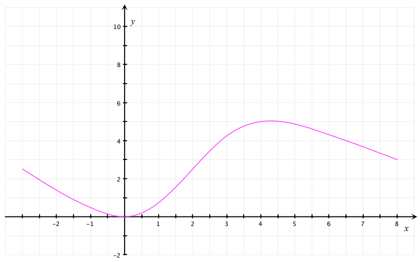
b. Déterminer le sens de variation de la fonction F sur I. Justifier la réponse à partir d'une lecture graphique des propriétés de f.

3. On dispose de deux représentations graphiques sur I.

Courbe A



Courbe B



L'une de ces courbes peut-elle représenter la fonction F ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x - x\ln x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et $+\infty$.
2. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et que $g'(x) = -\ln x$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^n}{n^n}$.

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :
   - **a.** le sens de variation de la suite (u_n) ;
   - **b.** la limite éventuelle de la suite (u_n).
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \ln(u_n)$.
   - **a.** Montrer que $v_n = n - n\ln n$.
   - **b.** En utilisant la **Partie A**, déterminer le sens de variation de la suite (v_n).
   - **c.** En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est bornée.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 3

Commun à tous les candidats