Université de Jijel **Avril 2010**
Département d'informatique
Module : Optimisation Stochastique
Première année Master

TD N°2 : Programmation Linéaire

Exercice 1

Le problème du sac à dos peut –il être modélisé sous forme d'un programme linéaire ? Discuter.

Exercice 2

Une entreprise fabrique trois modèles de TV A, B et C qui lui rapportent des profits de 160, 300 et 500 u.m (unité monétaire), respectivement. Les niveaux minima de production pour une semaine sont de 100 pour A, 150 pour B et 75 pour C. Chaque douzaine de TV de type i requiert un temps F_i pour la fabrication, un temps A_i pour l'assemblage et un temps E_i pour l'emballage (*voir le tableau ci-dessous*). Pendant la semaine à venir, l'entreprise aura 150 heures disponibles pour la fabrication, 200 pour l'assemblage et 60 pour l'emballage.

	A	B	C
F_i	3	3.5	5
A_i	4	5	8
E_i	1	1.5	3

Q1. Formulez un modèle donnant un plan de production qui maximise le profit de la compagnie.

Q2. Mettre le modèle obtenu sous forme standard.

Exercice 3

Monsieur Paul possède m balances. Obsédé par son poids, il se pèse chaque matin sur chacune de ses balances et relève les valeurs $\{p_1, \ldots, p_m\}$. Évidemment ses balances sont rarement d'accord et, afin d'estimer son poids p, Monsieur Paul cherche à calculer la valeur $\hat{p}$ minimisant :
a) l'erreur de mesure maximale parmi les m mesures, **ou**
b) la somme des erreurs de mesure de ses m balances.

Q. Trouver les problèmes linéaires correspondants aux deux fonctions objectifs (a) et (b).

Indications (règles de transformation particulières)

Min-Max

$$\text{Min } z = \max\{c_1x + d_1, \ldots, c_kx + d_k\} \Leftrightarrow \begin{array}{rr} & \text{Min } z = t \\ s.c. & t \geq c_1x + d_1 \\ & \ldots.. \\ & t \geq c_kx + d_k \\ & t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Valeur absolue

$$|x| \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq b \\ x \geq -b \end{cases}$$

Exercice 4

Trouver graphiquement la solution optimale de chacun des PL suivants :

$$\begin{aligned}&\min w = x_1\\ &\text{s.c} -x_1 + x_2 \geq 1\\ &x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geq 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\max z = 20x_1 + 30\, x_2\\ &s.c\\ &x_1 + 3\, x_2 \leq 18\\ &x_1 + x_2 \leq 8\\ &2\, x_1 + x_2 \leq 14\\ &x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0\end{aligned}$$

Exercice 5

Q1. Trouver le dual du programme primal suivant :

$$\begin{aligned}&\min z = c^T\, x\\ &\text{s.c } Ax \leq b\\ &x \geq 0\end{aligned}$$

Q2. Soit le programme primal suivant :

$$\begin{aligned}&\min\; 3x_1 + 3\,x_2 - 16x_3\\ &\text{s.c }\; 5x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 2\\ &\quad -5x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 4\\ &\quad x_i \geq 0, i = 1,2,3\end{aligned}$$

a. Trouver son programme dual.

b. Vérifier si les deux programmes (duale et primal) sont faisables.

Q3. Montrer que le problème suivant est non-borné :

$$\begin{array}{ll}\max & x_1 + 3x_2 - x_3\\ \text{s.c} & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 10\\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10\\ & -6x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 10\\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

Exercice 6

Un industriel fabrique deux produits P et Q à l'aide de deux matières première M et N. Pour produire une unité de P, il utilise une unité de M et deux unités de N ; de même pour fabriquer une unité de Q, il emploi trois unités de M et deux unités de N. Pour des raisons budgétaires, il ne peut pas utiliser plus de 12 unités de chaque matière première. Sachant qu'il gagne 10 u.m par unité de P et 15u.m par unité de Q, il cherchera à établir un plan de production optimal.

Q1. Formuler le PL correspondant.

Q2. Trouver graphiquement la solution optimale.

Q3. La notion de dualité admet souvent une interprétation économique intéressante. On peut dire que le primal et dual correspondent à deux conceptions concurrentes de l'économie et conduisent néanmoins à un résultat identique qui est le compromis accepté par les deux antagonistes. A la lumière de cela, écrire le problème dual et donner une interprétation économique pour ce dernier.