

SUITES NUMERIQUES

Deuxième partie.

**Ex 4 :**

$u$  est une suite définie sur  $\mathbb{N}$  et croissante.

$v$  est une suite définie sur  $\mathbb{N}$ , à termes strictement positifs et croissante.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $w_n = u_n - \frac{1}{2v_n}$

Que peut-on dire de la suite  $w$  ?

**Ex 5 :**

Calculer les sommes ci-dessous :

a)  $S = 5 + \frac{17}{3} + \frac{19}{3} + 7 + \dots + \frac{187}{3} + 63$

b)  $S' = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \dots + 16 + 16\sqrt{2}$

**Ex 6 :**

$u$  est la suite définie par  $u_0 = 0$  est la relation de récurrence  $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$  pour tout entier  $n$ .

$v$  est la suite définie pour tout entier  $n$  par  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$ .

a) Montrer que  $v$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme  $v_0$  et la raison .

b) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$  .

c) En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$  .

#### Exercice 4

$u$  est croissante, donc pour tout entier  $n$ , on a :  $u_n \leq u_{n+1}$

$v$  est croissante, donc pour tout entier  $n$ , on a :

$$\begin{aligned}v_n \leq v_{n+1} &\Leftrightarrow 2v_n \leq 2v_{n+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2v_n} \geq \frac{1}{2v_{n+1}} \text{ ( car pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n > 0 \text{ )} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2v_n} \leq -\frac{1}{2v_{n+1}}\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$u_n - \frac{1}{2v_n} \leq u_{n+1} - \frac{1}{2v_{n+1}} \Leftrightarrow w_n \leq w_{n+1}$$

ainsi la suite  $w$  est croissante.

#### Exercice 5

a)

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 5 + \frac{2}{3}n$ ;  $(u_n)$  est une suite arithmétique de premier terme  $u_0 = 5$  et de raison  $\frac{2}{3}$

On a  $S = u_0 + u_1 + \dots + u_p$

$$\text{et } u_p = 63 \Leftrightarrow 5 + \frac{2}{3}p = 63 \Leftrightarrow \frac{2}{3}p = 58 \Leftrightarrow p = 87$$

$$\text{Ainsi } S = u_0 + u_1 + \dots + u_{87} = 88 \times \frac{u_0 + u_{87}}{2} = 44 \times (5 + 63) = 44 \times 68 = 2992$$

b)

Soit la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = \frac{1}{8}(\sqrt{2})^n$ ;  $(v_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $v_0 = \frac{1}{8}$  et de raison  $\sqrt{2}$

On a  $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_p$

$$\text{et } v_p = 16\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{8}(\sqrt{2})^p = 16\sqrt{2} \Leftrightarrow (\sqrt{2})^{p-1} = 128$$

$$\text{On a } (\sqrt{2})^{14} = 128$$

Donc  $p = 15$

$$\text{Ainsi } S = v_0 + v_1 + \dots + v_{15} = \frac{1}{8} \times \frac{1 - (\sqrt{2})^{16}}{1 - \sqrt{2}} = \dots = \frac{255}{8} (1 + \sqrt{2})$$

#### Exercice 6

a)

Pour tout entier  $n$ , on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} = \frac{u_n - 1}{5u_n + 15}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{u_n - 1}{5u_n + 15}}{\frac{u_n - 1}{u_n + 3}} = \dots = \frac{1}{5}$$

Ainsi  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{5}$  et de premier terme  $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = -\frac{1}{3}$

b) Pour tout entier  $n$ , on a :

$$v_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

c) Pour tout entier  $n$ , on a :

$$\begin{aligned}v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} &\Leftrightarrow v_n \times u_n + 3 \times v_n = u_n - 1 \\ &\Leftrightarrow v_n \times u_n - u_n = -1 - 3v_n \\ &\Leftrightarrow u_n \times (v_n - 1) = -1 - 3v_n \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{-1 - 3v_n}{v_n - 1}\end{aligned}$$

En remplaçant par  $v_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$ , on obtient :

$$u_n = -3 \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{5}\right)^n + 3} = -3 \times \frac{1 - 5^n}{1 + 3 \times 5^n} = 3 \times \frac{5^n - 1}{1 + 3 \times 5^n}$$